משוואות דיפרנציאליות

9 ביולי 2026

תוכן עניינים

1 משוואות דיפרנציאליות רגילות 3
1.1 הגדרות בסיסיות 3
1.2 קיום ויחידות 4
1.3 תלות בתנאי ההתחלה 7
1.4 משוואות לינאריות עם מקדמים קבועים 11
1.5 משוואות לינאריות לא הומגניות 15
1.6 התנהגות לוקלית, התנהגות גלובלית ויציבות 16
2 מערכות שטורם־ליוביל 22
2.1 מוטיבציה קצרה 22
2.2 משוואות עם תנאי שפה 22
2.3 ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות 25
3 משוואות דיפרנציאליות חלקיות 29
3.1 משוואת לפלס 29
3.2 בעיית דיריכלה 32
3.3 שיטת Perron לפתרון בעיית דיריכלה 33
3.4 תנאי שפה 36

1 משוואות דיפרנציאליות רגילות

1.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1 משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר n

משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר n היא משוואה מהצורה

$$F\big(x(t), x'(t), ..., x^{(n)}(t), t\big) = 0$$

כאשר t משתנה זמן חופשי היכן ש־$F : \Omega \to \mathbb{R}$ כאשר $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ קבוצה פתוחה.
פיתרון של המשוואה בקטע $I \subseteq \mathbb{R}$ הוא פונקציה $x : I \to \mathbb{R}$ אשר גזירה n פעמים כך ש־x מקיים את המשוואה לכל $t \in I$.
באופן דומה, מערכת של m משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר n היא מערכת משוואות מהצורה

$$F\big(x(t), x'(t), ..., x^{(n)}(t), t\big) = 0$$

עבור $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{(n+1)m+1} \to \mathbb{R}^m$ ופתרון שלה בקטע $I \subseteq \mathbb{R}$ הוא פונקציה גזירה n פעמים $x : I \to \mathbb{R}^m$ שפותרת את המשוואה בכל $t \in I$.

הגדרה 1.2 מערכת/משוואה אוטונומית

נאמר שהמערכת / משוואה היא אוטונומית אם F אינה תלויה ב־t.

הגדרה 1.3 מערכת משוואות לינארית

נאמר שמשוואה דיפרנציאלית היא לינארית אם יש פונקציות $c_0, c_1, ..., c_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$F(x(t), x'(t), ..., x^n(t), t) = c_0(t)x(t) + c_1(t)x'(t) + \cdots + c_n(t)x^n(t) + f(t)$$

אם כל ה־c_i־ים לא תלויים ב־t נאמר שהמשוואה במקדמים קבועים ואם $f(t) = 0$ נאמר שהמשוואה הומוגנית.

הערה

נשים לב שבמשוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית כל צירוף לינארי של פתרונות הוא פתרון. שכן, אם למשל $x_1, ..., x_m$ פתרונות למשוואה לינארית הומוגנית ו־$\alpha_1, ..., \alpha_m$ סקלרים, אזי

$$g(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i(t)$$

הוא צירוף לינארי של פתרונות.
נציב את הפונקציה במשוואה כדי לקבל את הביטוי $\sum_{j=0}^{n} c_j(t)(g^j(t))$ ונרצה להראות שתוצאתו היא 0: ואכן, מתוך לינאריות הנגזרת והחלפת סדר הסכימה נקבל

$$\sum_{j=0}^{n} c_j(t)(g^j(t)) = \sum_{j=0}^{n} c_j(t)\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i^j(t)\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(\sum_{j=0}^{n} c_j(t) x_i^j(t)\right)$$

מכיוון שכל הפונקציות x_i הן פתרונות של המשוואה ההומוגנית, הסכום הפנימי בסוגריים שווה ל־0 לכל i. לכן מתקבל:

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot 0 = 0$$

ומכאן שגם $g(t)$ פותרת את המשוואה, כנדרש.

הערה

באינפ׳2 פתרנו משוואות מהצורה $x'(t) = f(t)$.
אם יודעים לחשב פונקציה קדומה ל־f אז נוכל לכתוב $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s$ מהמשפט היסודי ($x(t_0)$ זה מידע שתמיד היינו צריכים לקבל מאיפשהו).
לכן, גם בקורס הזה כשנתבונן במשוואות דיפרנציאליות תמיד נקבע את תנאי ההתחלה $x(0) = x_0$ וננסה לפתור את המשוואה עם הנתון הזה. זה נקרא בעיית התחלה.

1.2 קיום ויחידות

משפט 1.4

נניח שנתונה מערכת m משוואות דיפרנציאליות מסדר n כאשר $x^{(n)}(t) = F\big(x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t), t\big)$ עבור $F : U \to \mathbb{R}^m$ כאשר $U \subseteq R^{nm+1}$.
אז יש מערכת מסדר 1, $y'(t) = G(y(t), t)$ עבור $G : V \subseteq \mathbb{R}^{nm+1} \to \mathbb{R}^{nm}$ כך שהמערכות שקולות במובן הבא

1. אם $x(t)$ פתרון למערכת המקורית אז $y = \big(x, x', ..., x^{(n-1)}\big)$ הוא פתרון למערכת החדשה
2. אם y פתרון למערכת החדשה אזי $x = y_0$ הוא פתרון למערכת המקורית ולכל $0 \le i \le n-2$ מתקיים $y_i' = y_{i+1}$

סוף הרצאה 1 – 23/03

הוכחה: נוכיח עבור $m = 1$, המקרה הכללי דומה. נסמן ב־I את $x^{(n)}(t) = F\big(x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t), t\big)$ וב־II את $y'(t) = G(y(t), t)$.
נגדיר את המערכת $y'(t) = G(y(t), t)$ על־ידי

$$\begin{cases} y_0'(t) = y_1(t) \\ y_1'(t) = y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}'(t) = F(y_0(t), ..., y_{n-1}(t), t) \end{cases}$$

כלומר

$$G(y_0, ..., y_{n-1}, t) = (y_1, ..., y_{n-1}, F(y_0, ..., y_{n-1}, t))$$

נראה שכל התנאים מתקיימים.
$I \implies II$ נניח ש־$x(t)$ הוא פתרון של המערכת המקורית I.
נגדיר וקטור $y(t)$ על ידי הרכיבים $y_i(t) = x^{(i)}(t)$ לכל $0 \le i \le n-1$. נוכיח ש־$y(t)$ מקיים את מערכת II:
לכל $0 \le i \le n-2$, מתקיים מההגדרה ש־$y_i'(t) = \big(x^{(i)}(t)\big)' = x^{(i+1)}(t) = y_{i+1}(t)$. אלו הן $n-1$ המשוואות הראשונות במערכת החדשה.
עבור הרכיב האחרון, מתקיים $y_{n-1}'(t) = \big(x^{(n-1)}(t)\big)' = x^{(n)}(t)$. מכיוון ש־$x(t)$ הוא פתרון של המערכת המקורית I, נציב את הביטוי שלו ונקבל

$$y_{n-1}'(t) = F\big(x, x', ..., x^{(n-1)}, t\big) = F(y_0, y_1, ..., y_{n-1}, t)$$

לכן, הוקטור $y(t)$ שנבנה פותר את המערכת החדשה II.
$I \implies II$ נניח ש־$y(t) = (y_0, y_1, ..., y_{n-1})$ הוא פתרון של המערכת החדשה II.
נגדיר פונקציה $x(t) = y_0(t)$ ונוכיח שהיא פותרת את המערכת המקורית I: מהמשוואה הראשונה של המערכת II נובע ש־$y_0' = y_1$, ולכן $x' = y_1$, מהמשוואה השנייה $y_1' = y_2$, ולכן בגזירה חוזרת נקבל $x^{(2)} = (y_1)' = y_2$. באופן אינדוקטיבי, לכל $0 \le i \le n-1$ מתקיים ש־$x^{(i)}(t) = y_i(t)$.
במשוואה האחרונה מתקיים $y_{n-1}'(t) = F(y_0, y_1, ..., y_{n-1}, t)$.
מצד שמאל, $y_{n-1}' = \big(x^{(n-1)}\big)' = x^{(n)}$. מצד ימין, נציב את הקשרים שמצאנו ($y_i = x^{(i)}$) ונקבל בדיוק

$$x^{(n)}(t) = F\big(x, x', ..., x^{(n-1)}, t\big)$$

משמע ש־$x(t)$ הוא פתרון למערכת המקורית I. □

בתרגיל הבית נראה באופן דומה שאפשר לכל מערכת לא אוטונומית לבנות מערכת שקולה שכן אוטונומית ולכן מעתה נעסוק במערכות של משוואות דיפרנציאליות רגילות אוטונומיות מסדר 1.
טבעי לשאול מהם התנאים שמבטיחים קיום פתרון למשוואות דיפרנציאליות.

משפט 1.5 משפט הקיום של פיאנו

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, $F : U \to \mathbb{R}^n$ רציפה ו־$\widetilde{x_0} \in U$ נקודת התחלה.
אז יש $\delta > 0$ ופונקציה גזירה $x : (-\delta, \delta) \to U$ שפותרת את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x(0) = \widetilde{x_0} \\ x'(t) = F(x(t)) \end{cases}$$

הערה

תנאי המשפט לא מבטיחים יחידות.

הוכחה: יהי $r>0$ כך ש־$B:=\overline{B(\widetilde{x_0},r)}\subseteq U$, נסמן $M:=\|F|_B\|_\infty=\sup_{x\in B}|F(x)|$, נגדיר $\delta=\frac{r}{M}$ ואת סדרת הפונקציות $x_k:[-\delta,\delta]\to U$ על־ידי

$$x_0(t)=\widetilde{x_0}$$

$$x_k(t)=\begin{cases}\widetilde{x_0}+tF(\widetilde{x_0}) & t\in\left[-\frac{\delta}{k},\frac{\delta}{k}\right]\\ x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right)+\left(t-\frac{j\delta}{k}\right)F\left(x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right)\right) & t\in\left[\frac{j\delta}{k},\frac{(j+1)\delta}{k}\right]\\ x_k\left(-\frac{j\delta}{k}\right)+\left(t+\frac{j\delta}{k}\right)F\left(x_k\left(-\frac{j\delta}{k}\right)\right) & t\in\left[-\frac{(j+1)\delta}{k},-\frac{j\delta}{k}\right]\end{cases}$$

נשים לב ש־$x_k(t)$ לינארית למקוטעין ב־t ולכן גזירה פרט למספר סופי של נקודות ותמונתה נמצאת בכדור B, כלומר $Im(x_k)\in B$ שכן לכל $0<\delta<t$ מתקיים

$$\begin{aligned}\|x_k(t)-\widetilde{x_0}\|&=\left\|\int_0^t x_k'(s)\,\mathrm{d}s\right\|\\&\underset{\triangle}{\leq}\int_0^\delta\|x_k'(s)\|\,\mathrm{d}s\\&=\int_0^{\frac{\delta}{k}}\|F(\widetilde{x_0})\|\,\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{k-1}\int_{\frac{j\delta}{k}}^{\frac{(j+1)\delta}{k}}\left\|F\left(x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right)\right)\right\|\mathrm{d}s\end{aligned}$$

באופן רקורסיבי ניתן להראות שלכל j מתקיים $x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right)\in B$ ולכן $\left\|F\left(x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right)\right)\right\|\leq M$ ונקבל לבסוף

$$\begin{aligned}\|x_k(t)-\widetilde{x_0}\|&\leq\int_0^{\frac{\delta}{k}}\|F(\widetilde{x_0})\|\,\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{k-1}\int_{\frac{j\delta}{k}}^{\frac{(j+1)\delta}{k}}\left\|F\left(x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right)\right)\right\|\mathrm{d}s\\&\leq M\cdot\frac{\delta}{k}+\sum_{j=1}^{k-1}M\left(\frac{(j+1)\delta}{k}-\frac{j\delta}{k}\right)\\&\leq M\cdot\delta\\&=r\end{aligned}$$

סוף הרצאה 2 – 24/03

באופן זהה נקבל גם עבור $-\delta<t<0$ ולכן הסדרה $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ חסומה במידה שווה (שכן כולן בתוך B) והן רציפות במידה אחידה שכן לכל k מתקיים

$$\|x_k(t)-x_k(s)\|\leq M|t-s|$$

אז הסדרה רציפה במידה אחידה ולכן ממשפט ארצלה־אסקולי יש לסדרה תת־סדרה $\left(x_{k_j}\right)_{j=1}^\infty$ מתכנסת במידה שווה לגבול x ולשם הפשטות נקרא לתת־סדרה זו $(x_k)_{k=1}^\infty$.
נרצה להראות ש־x גזירה ומקיימת $x'(t)=F(x(t))$ ומכך ש־F רציפה מהמשפט היסודי מספיק להראות

$$x(t)=\widetilde{x_0}+\int_0^t F(x(s))\,\mathrm{d}s$$

ואכן, לכל k נגדיר את $y_k:[-\delta,\delta]\to U$ ולכל $1\leq j<k$ על־ידי

$$y_k(s)=\begin{cases}\widetilde{x_0} & s\in\left[-\frac{\delta}{k},\frac{\delta}{k}\right]\\ x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right) & s\in\left[\frac{\delta j}{k},\frac{(j+1)\delta}{k}\right]\\ x_k\left(-\frac{j\delta}{k}\right) & s\in\left[-\frac{(j+1)\delta}{k},-\frac{j\delta}{k}\right]\end{cases}$$

אז לכל k מתקיים $x_k(t)=\widetilde{x_0}+\int_0^t F(y_k(s))\,\mathrm{d}s$ ומתקיים

$$\|y_k-x_k\|_\infty\leq\frac{M\delta}{k}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

אז (y_k) מתכנסת במידה שווה לאורך אותה תת־סדרה ל־x.
יתר על־כן, $F\circ y_k\to F\circ x$ שכן F רציפה במידה שווה ב־B ולכן לכל $\varepsilon>0$ יש $\eta>0$ ו־k גדול דיו כך שיתקיים $\|y_k-x\|_\infty<\eta$ (מההתכנסות לעיל) ומכאן $\|F(y_k)-F(x)\|_\infty<\varepsilon$. התכנסות במידה שווה מאפשרת להחליף סדר אינטגרציה וסכום ולכן

$$x(t)=\lim_{\ell\to\infty}x_{k_\ell}(t)=\widetilde{x_0}+\lim_{\ell\to\infty}\int_0^t F\left(y_{k_\ell}(s)\right)\mathrm{d}s=\widetilde{x_0}+\int_0^t\lim_{\ell\to\infty}F\left(y_{k_\ell}(s)\right)\mathrm{d}s=\widetilde{x_0}+\int_0^t F(x(s))\,\mathrm{d}s$$

$\square$

מסקנה 1.6

אם $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ קבוצה פתוחה ו־$F : U \to \mathbb{R}$ רציפה אז לכל $(y_0, y_1, ..., y_{n-1}, t_0) \in U$ יש $\delta > 0$, $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$\begin{cases} x(t_0) = y_0 \\ x'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \\ x^{(n)}(t) = F(x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t), t) \end{cases}$$

הוכחה: מכוון שכל משוואה לא אוטונומית מסדר n ניתן להמיר למערכת משוואות אוטונומית מסדר 1 ואז עם משפט 1.4 נקבל את הנדרש. □

לא ראינו בתנאים שניסחנו יחידות של הפתרון ואם הפתרון בתנאים האלו הוא בהכרח יחיד ואכן לא כך הדבר.

דוגמה

$$x'(t) = 2\sqrt{|x(t)|} \Longrightarrow F(x) = 2\sqrt{|x|}$$

זו פונקציה $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ויש שני פתרונות $x = 0$ ו־$x(t) = t^2$ ואלו שני פתרונות שלא מתלכדים על אף סביבה של 0.

יחד עם זאת, ניתן למצוא תנאים ליחידות וזהו משפט פיקארד.

משפט 1.7 משפט פיקארד

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, $\widetilde{x_0} \in \mathbb{R}^n$ ותהיי $F : U \to \mathbb{R}^n$ שהיא ליפשיצית מקומית כלומר לכל $K \subseteq U$ קומפקטית יש קבוע L_K כך ש־$F|_K$ ליפשיצית עם הקבוע L_K.
אזי יש $\delta > 0$ כך שקיים פתרון יחיד בקטע $[-\delta, \delta]$ לבעיה

$$\begin{cases} x(0) = \widetilde{x_0} \\ x'(t) = F(x(t)) \end{cases}$$

ישנן שתי הוכחות למשפט – אחת באמצעות משפט העתקה מכווצת שראינו בתרגול 2 ואחת מההרצאה.
הוכחה של יונתן בהרצאה: משפט פיקארד נובע מהלמה הבאה בעזרת משפט פיאנו.

למה 1.8

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ ליפשיצית מקומית.
נניח ש־$x(t)$ ו־$y(t)$ שני פתרונות של המשוואה $\eta'(t) = F(\eta(t))$ כך ש־x מוגדר על הקטע הפתוח $I \subseteq \mathbb{R}$ ו־y מוגדר על הקטע הפתוח $J \subseteq \mathbb{R}$.
אם $0 \in I \cap J$ ו־$x(0) = y(0)$ אזי $x(t) = y(t)$ לכל $t \in I \cap J$.

הוכחה: נוכיח ש־$x(t) = y(t)$ לכל $t \in I \cap J \cap [0, \infty)$. נניח שלא ככה ונגדיר $\tau = \inf\{t \in I \cap J \cap (0, \infty) \mid x(t) \neq y(t)\}$ ומרציפות $\overline{x} = x(\tau) = y(\tau)$.
ניקח $r > 0$ כך ש־$\overline{B_{2r}(\overline{x})} \subseteq U$ וניקח $\delta > 0$ כך שיתקיים $[\tau, \tau + \delta] \subseteq I \cap J$ וגם $x(t), y(t) \in \overline{B_r(\overline{x})}$ לכל $t \in [\tau, \tau + \delta]$.
נסמן ב־L את קבוע ליפשיץ של $F|_{\overline{B_r(\overline{x})}}$, עבור $t \in [\tau, \tau + \delta]$ מתקיים

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x(t) - y(t)\|^2 &= 2\langle x(t) - y(t), x'(t) - y'(t)\rangle \\ &= 2\langle x(t) - y(t), F(x(t)) - F(y(t))\rangle \\ &\underset{(\star)}{\leq} 2\|x(t) - y(t)\| \cdot \|F(x(t)) - F(y(t))\| \\ &\underset{(\star\star)}{\leq} 2L \cdot \|x(t) - y(t)\|^2 \end{aligned}$$

כאשר $(\star)$ זה אי־שיוויון קושי־שוורץ ו־$(\star\star)$ זה מהליפשיציות.
אז הפונקציה $f(t) = e^{-2Lt}\|x(t) - y(t)\|^2$ היא מונוטונית יורדת כי מגזירה

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \leq -2Lf(t) + 2Lf(t) = 0$$

הנגזרת לא חיובית ולכן היא מונוטונית יורדת ובנוסף $f(t)$ אי־שלילית ב־$[\tau, \tau + \delta]$ אבל $f(\tau) = 0$ ולכן $f(t) = 0$ לכל $t \in [\tau, \tau + \delta]$ ולכן $\|x(t) - y(t)\| = 0$ וזו סתירה להגדרת τ בתור אינפימום.
עבור t־יים שליליים ההוכחה דומה עם sup ופונקציה קצת אחרת או להסתכל על $\tilde{x}(t) = x(-t)$ ומהמשוואה $\eta'(t) = -F(\eta(t))$. □
□

1.3 תלות בתנאי ההתחלה

הגדרה 1.9 הפיתרון המקסימלי

נניח ש־$U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ ליפשיץ מקומית.
לכל $p \in U$ יש $\delta > 0$ כך שלבעיה

$$(\star) \begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(0) = p \end{cases}$$

נגדיר

$$J_p^* := \{t \in \mathbb{R} \mid \text{the solution for the problem } (\star) \text{ exists on a segment that contains } t\}$$

ו־J_p^* היינו קטע (כי אם t נמצא בו ו־0 נמצא בו אז כל נקודה בין 0 ל־t נמצא בו כי זה מכיל את הקטע).
הפיתרון שמוגדר על J_p^* הוא יחיד (מהלמה שהוכחנו) ופיתרון זה נקרא הפיתרון המקסימלי לבעיית ההתחלה.

משפט 1.10 טריכוטומיה של זרימות של שדה ליפשיץ מקומי

תהיי $U \in \mathbb{R}^n$ פתוחה, תהיי $p \in U$ ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ ליפשיץ מקומית.
נסמן $X : J_p^* \to U$ הפיתרון המקסימלי לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(0) = p \end{cases}$$

אזי עבור $T \in \partial J_p^* \setminus \{\pm\infty\}$ מתקיים אחד משני המקרים הבאים

1. $\liminf\limits_{t \to T} \operatorname{dist}(x(t), \partial U) = 0$
2. $\limsup\limits_{t \to T} \|x(t)\| = \infty$

הוכחה: נניח ש־$\sup J_p^* = T < \infty$, $\liminf_{t \to T} \operatorname{dist}(x(t), \partial U) > 0$ וש־$\limsup_{t \to T} \|x(t)\| < \infty$.
כלומר, הקבוצה (התמונה של המסילה) $x([0,T))$ חסומה ומוכלת בקבוצה הסגורה

$$A_{\varepsilon_0} := \left\{x \mid \operatorname{dist}(x, \partial U) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}\right\}$$

לאיזשהו $\varepsilon_0 > 0$.
ניקח סדרה $0 < t_k < T$ כך ש־$t_k \xrightarrow[k \to \infty]{} T$ ונבחין ש־x_{t_k} כולם שייכים לקבוצה A_{ε_0} וגם לקבוצה החסומה $x([0,T))$.
נפעיל את (ההוכחה של) משפט פיקארד עם x_{t_k} כנקודת התחלה עם אותו $\delta > 0$ לכולם שכן δ תלוי ברדיוס בכדור שניתן לקחת סביב x_{t_k} ובחסם על $\|F|_B\|$ אבל את הרדיוס והחסם על הנורמה ניתן לבחור באופן אחיד (כי F רציפה ולכן חסומה וזה חוסם את כל הנקודות).
יהי K כך ש־$T < t_K + \delta$ ונקבל סתירה לכך ש־$T = \sup J_p^*$ כי ממשפט פיקארד הפיתרון מוגדר מעבר ל־T.
משיקולי סימטריה ההוכחה למקרה השני זהה. □

טענה 1.11

תהיי $U \in \mathbb{R}^n$ פתוחה, תהיי $p \in U$ ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ ליפשיץ מקומית.
נניח שאנחנו יודעים שקיימת קבוצה קומפקטית $K \subseteq U$ ו־$T > 0$ ($T < 0$ עובד באופן דומה) כך שלכל $0 < t < T$ מתקיים שאם $t \in J_p^*$ אז $x_p(t) \in K$ אז מתקיים $[0,T) \subseteq J_p^*$.
כלומר, אם הפיתרון בתנאי התחלה p קיים עד לזמן t שבפיתרון המקסימלי אז $x_p(t) \in K$ אז אם כל זה קורה, $[0,T) \subseteq J_p^*$.

הוכחה: אם $T > \sup J_p^*$ אז נסמן $T > \tau = \sup J_p^*$ ונקבל ש־$x([0,\tau)) \subseteq K$ אבל אז לא קרה אף אחד מהדברים (לא התפוצצנו ולא נגענו בשפה) בסתירה לכך ש־$\tau < T \neq \infty$. □

הגדרה 1.12

נגדיר

$$\Omega := \left\{(p,t) \mid p \in U, t \in J_p^*\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

לכל $(p,t) \in \Omega$ נגדיר את $\Phi(p,t) = x_p(t) = \varphi_t(p)$ היכן ש־$x_p(t)$ פיתרון ל־$x_p'(t) = F\big(x_p(t)\big)$ ו־$x_p(0) = p$.
כאשר כמובן $F : U \to \mathbb{R}^n$ ליפשיצית מקומית עבור $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

משפט 1.13

הקבוצה Ω היא קבוצה פתוחה וההעתקה $\Phi : \Omega \to U$ היא רציפה (F כמובן ליפשיץ מקומית).

הוכחה: תהיי $(p,t_0) \in \Omega$, נרצה להראות ש־Ω מכילה סביבה של (p,t_0) וש־Φ רציפה שם.
ניקח $t_0 \geq 0$ (לשלילי אותו הדבר אבל אנחנו אנשים חיוביים) ותהיי

$$C := \{\Phi(p,t) \mid 0 \leq t \leq t_0\} \subseteq U$$

זאת קבוצה סגורה וחסומה ולכן קומפקטית ויש לה מרחק חיובי מהשפה (כלומר, קיים $r > 0$ כך ש־$0 < 4r < \operatorname{dist}(C, \partial U)$). נסמן

$$M := \sup\{\|F(x)\| \mid \operatorname{dist}(x,C) \leq 4r\}, \quad L := \operatorname{Lip} F|_{\operatorname{dist}(x,C)\leq 4r}$$

בשביל ההוכחה הזאת אנחנו צריכים 3 למות.

למה 1.14

תהיי $q \in U$ כך ש־$\|q-p\| \leq re^{-Lt_0}$ אזי לכל $0 \leq t \leq t_0$ כך ש־$(q,t) \in \Omega$ מתקיים

$$\|\Phi(p,t) - \Phi(q,t)\| \leq 2e^{Lt}\|p-q\| \leq 2r$$

הוכחה של למה 1.14: נסמן $x_p(t), x_q(t)$ להיות הפתרונות המתאימים.
נניח שקיים $0 \leq t \leq t_0$ כך ש־$(q,t) \in \Omega$ אבל $\|x_p(t) - x_q(t)\| \geq 2e^{Lt}\|p-q\|$.
ברור כי $q \neq p$ ונסמן

$$\tau := \inf\{t \in [0,t_0] \mid (q,t) \in \Omega,\ \|x_p(t) - x_q(t)\| \geq 2e^{Lt}\|p-q\|\}$$

אז $0 < \tau \leq t_0$ (מהרציפות), $(q,\tau) \in \Omega$ וכן $\|x_p(\tau) - x_q(\tau)\| = 2e^{L\tau}\|p-q\|$.
יתרה מזאת, לכל $t \in [0,\tau]$

$$\|x_p(t) - x_q(t)\| \leq 2e^{Lt}\|p-q\| \leq 2r$$

לכן $x_p(t), x_q(t)$ לכל $t \in [0,\tau]$ מוכל בקבוצה

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x,C) \leq 2r\}$$

ולכן F ליפשיץ שם עם קבוע L ובפרט לכל $t \in [0,\tau]$

$$\|F(x_p(t)) - F(x_q(t))\| \leq L\|x_p(t) - x_q(t)\|$$

ומכאן

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x_p(t) - x_q(t)\|^2 \leq 2L\|x_p(t) - x_q(t)\|^2$$

ולכן הפונקציה $t \mapsto e^{-2Lt}\|x_p(t) - x_q(t)\|^2$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,\tau]$ ומכאן נקבל

$$2\|p-q\| \leq e^{-L\tau}\|x_p(\tau) - x_q(\tau)\| \leq \|p-q\|$$

וזאת סתירה. □

סוף הרצאה 4 – 20/04

למה 1.15

תהיי q כזו ש־$\|p-q\| \leq re^{-Lt_0}$, אם $(q,t) \in \Omega$ ו־$0 \leq t \leq t_0 + \frac{r}{M}$ אזי $\Phi(q,t) \in \tilde{C}$.

הוכחה של למה 1.15: בשלילה נניח שיש $0 \leq t \leq t_0 + \frac{r}{M}$ כך ש־$(q,t) \in \Omega$ אבל $\operatorname{dist}(\Phi(q,t),C) > 4r$ ומהלמה הקודמת עבור $0 \leq t \leq t_0$ מתקיים $\operatorname{dist}(\Phi(q,t),C) \leq 2r$ ולכן עבור t כזה מהנחת השלילה בהכרח מתקיים $t_0 < r$ ובפרט $(q,t_0) \in \Omega$ (הערה: $(q,t) \in \Omega \iff t \in J_q^*$).
נסמן $\tau = \inf\{t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{r}{M} \mid (q,t) \in \Omega,\ \operatorname{dist}(q,C) > 4r\}$.
אבל $t_0 \leq \tau \leq t_0 + \frac{r}{M}$ ו־$\operatorname{dist}(\Phi(q,\tau),C) = 4r$ ויתר על־כן לכל $t_0 \leq t \leq \tau$ מתקיים $\operatorname{dist}((q,t),C) \leq 4r$ ובפרט לכל $0 \leq t \leq \tau$ מתקיים $\|F(\Phi((q,t)))\| \leq M$ ונשים לב

$$\operatorname{dist}(\Phi(q,\tau),C) \leq \|\Phi(q,\tau) - \Phi(q,t_0)\| + \operatorname{dist}(\Phi(q,t_0),C) \leq M \cdot (\tau - t_0) + 2r \leq M \cdot \frac{r}{M} + 2r = 3r$$

וזאת כמובן סתירה. □

למה 1.16

נניח ש־$\|p-q\| \le re^{-Lt_0}$ ו־$0 \le t \le t_0 + \frac{r}{M}$ אזי $(q,t) \in \Omega$ ומתקיים

$$\|\Phi(q,t_0) - \Phi(q,t)\| \le 2e^{Lt_0}\|p-q\| + M\|t_0 - t\|$$

הערה

הלמה הזאת מסיימת את ההוכחה של משפט 1.13 עבור $t_0 \ge 0$.
ראשית ברור מכאן ש־Ω פתוחה וכן ש־Φ רציפה עבור $t_0 > 0$ ובמקרה $t_0 = 0$ מקבלים סביבה ימנית ב־t והרציפות היא רציפות מימין ב־t ומהוכחה דומה עבור $t_0 \le 0$ נקבל רציפות משמאל וזה מסיים את ההוכחה.

הוכחה של למה 1.16: הראינו שבתנאים הנתונים לכל t שעבורו $(q,t) \in \Omega$ מתקיים $\operatorname{dist}(\Phi(q,t), C) \le 4r$ ולכן לכל $0 \le t \le t_0 + \frac{r}{M}$ כזה, $(q,t) \in \Omega$ כי אחרת היה $0 \le t_0 \le t_0 + \frac{r}{M}$ שעבורו הפתרון מגיע לשפה של U או מתפוצץ אבל זה לא ייתכן.
כעת, כדי לקבל את האי־שיוויון נכתוב

$$\|\Phi(p,t_0) - \Phi(q,t)\| \le \|\Phi(p,t_0) - \Phi(q,t_0)\| + \|\Phi(q,t_0) - \Phi(q,t)\| \le \underbrace{2e^{Lt_0}\|p-q\|}_{\text{Lemma 1}} + \underbrace{M|t-t_0|}_{\Phi(q,t)\in\bar{C}}$$

□
□

מה בנוגע לגזירות?
נשים לב ש־Φ גזירה לפי t שכן

$$x_p'(t) = \frac{\partial \Phi(,p,t)}{\partial t} = F \circ \Phi(p,t) = F\big(x_p(t)\big)$$

מה לגבי הגזירה של Φ לפי מיקום?
אם Φ גזירה לפי המיקום (נסמן את הנגזרת ב־$D\Phi$), בזמן 0 היא הזהות על כל U ולכן Φ אכן גזירה ומתקיים $D\Phi(p,0) = \mathrm{Id}$ ולכן

$$\frac{\partial}{\partial t} D\Phi = D\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) = D(F \circ \Phi) = DF(\Phi(p,t))D\Phi(p,t)$$

אז אם F לא גזירה אין על מה לדבר!

את הטענה הבאה הוכחנו בתרגיל הבית (את ההוכחה לא ראינו בהרצאה)

משפט 1.17

יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע פתוח המכיל את 0, ותהיי $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ פונקציה רציפה. אזי לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} M'(t) = A(t)M(t) \\ M(0) = \mathrm{Id} \end{cases}$$

קיים פתרון יחיד $M(t)$ המוגדר על כל הקטע I.

הוכחה: הפונקציה $F(M,t) = A(t)M$ היא ליניארית במשתנה M ורציפה במשתנה t. עבור כל $t_0 \in I$, F ליפשיצית מקומית במשתנה M (שכן על קטע קומפקטי המכיל את t_0, הנורמה של $A(t)$ חסומה). לפי משפט פיקארד, קיים פתרון יחיד $M(t)$ בסביבה של כל נקודה ב־I.
נסמן ב־$v_j(t)$ את העמודה ה־j של המטריצה $M(t)$. המשוואה המטריציונית שקולה למערכת של n משוואות וקטוריות מצומדות

$$v_j'(t) = A(t)v_j(t), \quad v_j(0) = \mathrm{e}_j$$

כאשר $\left(\mathrm{e}_j\right)_{j=1}^n$ הוא הבסיס הסטנדרטי ב־$\mathbb{R}^n$. מספיק להוכיח שכל עמודה $v_j(t)$ מוגדרת על כל הקטע I.
עבור v_j, על־ידי אינטגרציה של שני אגפי המשוואה מ־0 עד t נקבל

$$v_j(t) = \mathrm{e}_j + \int_0^t A(s)v_j(s)\,\mathrm{d}s \underset{\triangle}{\Longrightarrow} \|v_j(t)\| \le \|\mathrm{e}_j\| + \int_0^t \|A(s)\| \cdot \|v_j(s)\|\,\mathrm{d}s$$

יהי $[0,t] \subseteq I$ קטע סגור (עבור t־ים שליליים ההוכחה זהה). נסמן $L = \sup_{s\in[0,t]}\|A(s)\| < \infty$ (מרציפות A). נסמן $f(t) = \|v_j(t)\|$, ונקבל

$$f(\tau) \le 1 + L\int_0^\tau f(s)\,\mathrm{d}s$$

לפי הלמה של גרונוול, נובע כי $f(t) \le 1 \cdot e^{Lt} = e^{Lt}$ ולכן הנורמה של כל עמודה חסומה על כל קטע סגור ב־I והחסם e^{Lt} תקף לכל $t \in I$ וממשפט הטריכוטומיה הפיתרון $M(t)$ מוגדר וקיים על כל I. □

משפט 1.18 **תלות גזירה בתנאי ההתחלה**

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו־$p \in U$ עם $F : U \to \mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות ובפרט ליפשיץ מקומית.
יהי x_p הפיתרון המקסימלי לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(0) = p \end{cases}$$

ויהי $M(t)$ הפיתרון המקסימלי לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} M'(t) = DF(x(t))M(t) \\ M(0) = \mathrm{Id} \end{cases}$$

אזי לכל $T \in J_p^*$, φ_T גזירה ב־p והדיפרנציאל שלה נתון על־ידי $D\varphi_T(p) = M(t)$.

סוף הרצאה 5 – 27/04

הוכחה: נניח ש־$T > 0$ (כי אם $T = 0$ אז זו הזהות ולכן גזירה ועבור $T < 0$ זה תהליך דומה) ולכל $q \in U$ נגדיר

$$u(t) = x_q(t) - x_p(t) - M(t)(q-p)$$

צריך להוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $\|q-p\| < \delta$ אז $\|u(T)\| \le \varepsilon\|q-p\|$ ונסמן $\varepsilon > 0$ אז יהי

$$L := \sup_{t\in[0,T]} \left\|DF\big(x_p(t)\big)\right\|, \quad K = \sup_{t\in[0,T]} \|M(t)\|$$

קיימת $\eta > 0$ כך שמתקיים $\eta K T e^{T(L+\eta)} < \varepsilon$ וקיים $r > 0$ כך שלכל $t \in [0,T]$ ולכל z כך ש־$\left\|z - x_p(t)\right\| < r$ מתקיים

$$(\diamond)\ \left\|F(z) - F\big(x_p(t)\big) - DF\big(x_p(t)\big)\big(z - x_p(t)\big)\right\| < \eta\left\|z - x_p(t)\right\|$$

מרציפות הזרימה בתנאי ההתחלה קיים $\delta > 0$ כך שאם $\|q-p\| < \delta$ אז $\left\|x_q(t) - x_p(t)\right\| < r$ לכל $t \in [0,T]$.
צריך להעריך את $u(T)$: אם $\|u(T)\| = 0$ סיימנו, אחרת נסמן $\tau := \sup\{0 \le t \le T \mid u(t) = 0\}$ ו־$0 \le \tau < T$ אז על הקטע $(\tau, T]$ מאי־שיוויון קושי־שוורץ

$$(\heartsuit)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\| = \frac{\langle u(t), u'(t)\rangle}{\|u(t)\|} \le \|u'(t)\|$$

נחשב

$$\begin{aligned} u'(t) &= x_q'(t) - x_p'(t) - M'(t)(q-p) \\ &= F\big(x_q(t)\big) - F\big(x_p(t)\big) - DF\big(x_p(t)\big)M(t)(q-p) \\ &= F\big(x_q(t)\big) - F\big(x_p(t)\big) - DF\big(x_p(t)\big)\big(x_q(t) - x_p(t)\big) + DF\big(x_p(t)\big)u(t) \end{aligned}$$

נשים לב שממה שמצאנו לעיל והבחירה שלנו של q

$$\left\|F\big(x_q(t)\big) - F\big(x_p(t)\big) - DF\big(x_p(t)\big)\big(x_q(t) - x_p(t)\big)\right\| < \eta\left\|x_q(t) - x_p(t)\right\|$$

אז

$$\begin{aligned} \|u'(t)\| &\le \eta\left\|x_q(t) - x_p(t)\right\| + L\|u(t)\| \\ &= \eta\|u(t) + M(t)(q-p)\| + L\|u(t)\| \\ &\underset{\triangle}{\le} (\eta + L)\|u(t)\| + \eta\|M(t)(q-p)\| \\ &\le \eta K\|q-p\| + (L+\eta)\|u(t)\| \end{aligned}$$

בפרט עם $(\heartsuit)$ נקבל

$$(\star)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\| \le \eta K\|q-p\| + (L+\eta)\|u(t)\|$$

מאותו טריק של מרוכבות על נגזרת של אקספוננט

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-t(L+\eta)}\|u(t)\|\right) = e^{-t(L+\eta)}\left(-(L+\eta)\|u(t)\| + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|\right) \underset{(\star)}{\le} \eta K \underbrace{e^{-t(L+\eta)}}_{\le 1}\|q-p\| \le \eta K\|q-p\|$$

אבל האחרון זה נגזרת של פונקציה לינארית $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\eta K\|q-p\|t)$ ולכן הפונקציה $e^{-t(L+\eta)}\|u(t)\| - \eta K t\|q-p\|$ היא מונוטונית יורדת באינטרוול $(\tau, T]$ כי הנגזרת קטנה מאפס (מהצבה) ונקבל

$$e^{-T(L+\eta)}\|u(T)\| - \eta KT\|q-p\| \le e^{-\tau(L+\eta)}\underbrace{\|u(\tau)\|}_{=0} - \eta K\tau\|q-p\| = -\eta K\tau\|q-p\| \le 0$$

ובסך־הכל

$$\|u(T)\| \le e^{T(L+\eta)}\eta KT\|q-p\| < \varepsilon\|q-p\|$$

הערה

הסבר ל־$(\diamond)$: עד היום תמיד הסכמנו שאם $\|DG\|_{op} < M$ אז $\|G(z)-G(w)\| \le M\|z-w\|$ על המסלול בין z ל־w (טריק אינטגרציה).
אז עבור t,p נתונים נגדיר $G(z) = F(z) - DF\big(x_p(t)\big)z$ ומכללי גזירה

$$DG(z) = DF(z) - DF\big(x_p(t)\big)$$

ולכן

$$\|DG(z)\| = \big\|DF(z) - DF\big(x_p(t)\big)\big\| < \eta$$

ולכן

$$\big\|G(z) - G\big(x_p(t)\big)\big\| < \eta\big\|z - x_p(t)\big\|$$

והצבת הגדרת $G(z)$ מניבה את הנדרש.

$\square$

סוף הרצאה 6 – 28/04

1.4 משוואות לינאריות עם מקדמים קבועים

את המשפט הבא ראינו בתרגיל הבית וההוכחה כאן היא בהשראת הסיכום במודל טענה 4.1.

משפט 1.19

יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע שמכיל את 0, $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}, g : I \to \mathbb{R}^n$ פונקציות רציפות. אזי לכל $x_0 \in \mathbb{R}^n$ קיים פתרון יחיד אשר מוגדר על כל I לבעיית ההתחלה

$$(\star)\ \begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + g(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

הגדרה 1.20

בתנאי המשפט לעיל, אם $g(t) = 0$ לכל t המשוואה $(\star)$ נקראת הומוגנית והיא תקרא אוטונומית אם A ו־g אינן תלויות ב־t (אם A, g קבועות אז $(\star)$ אוטונומית).

הוכחה: מספיק להוכיח את המשפט לכל קטע סגור וחסום $I_0 \subseteq I$.

$$F(x,t) := A(t)x + g(t), \quad L := \sup_{t\in I_0}\|A(t)\|_{op}, \quad M := \sup_{t\in I_0}\|g(t)\|$$

מתקיים ש־$L < \infty$ שכן A רציפה ו־I_0 קומפקטי ולכן F רציפה ב־$\mathbb{R}^n \times I_0$ ומקיימת את תנאי ליפשיץ

$$\|F(x,t) - F(y,t)\| = \|A(t)\cdot(x-y)\| \le L\|x-y\|$$

ממשפט פיקארד מספיק להניח רציפות של F במשתנה הזמן וליפשציות מקומית של F במשתנה המיקום עם קבועי ליפשיץ שלא תלויים בזמן ולכן קיים פתרון יחיד לפרק זמן סופי כלשהו.
מאי־שיוויון קושי־שוורץ נקבל

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x(t)\|^2 &= 2\langle x'(t), x(t)\rangle \\ &= 2\langle A(t)x(t) + g(t), x(t)\rangle \\ &\le 2\|A(t)x(t) + g(t)\|\cdot\|x(t)\| \\ &\le 2\|A(t)x(t)\|\cdot\|x(t)\| + 2\|g(t)\|\cdot\|x(t)\| \\ &\le 2L\|x(t)\|^2 + 2M\|x(t)\|\end{aligned}$$

אז אפשר לקחת $0 < C$ שתלוי ב־L, M אבל לא תלוי ב־t (כי אחד ריבועי ב־$\|x(t)\|$ והשני לינארי בו) כך שמתקיים

$$2L\|x(t)\|^2 + 2M\|x(t)\| \le 4L\|x(t)\|^2 + C$$

בלי הגבלת הכלליות $0 < t$ ואז

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-4Lt}\|x(t)\|^2] \le Ce^{-4Lt} \le C$$

מאינטגרציה על התחום $[0,t]$ נקבל

$$\|x(t)\|^2 e^{-4Lt} - \|x_0\|^2 \le Ct \Longrightarrow \|x(t)\|^2 \le Cte^{4Lt} + \|x_0\|^2 e^{4Lt}$$

כלומר הפיתרון לא יכול להתפוצץ בזמן סופי (C, M, L תלויים בבחירת I_0 שקבועים ולא יכולים להתפוצץ בזמן סופי) ומטריכוטומיה הפתרון מוגדר היטב על כל I. □

משפט 1.21

מרחב הפתרונות המקסימלי למשוואה $(\star)$ עם $g(t) = 0$ לכל t (ללא תנאי התחלה) הוא מרחב לינארי ממימד n.

הערה

קבוצת הפתרונות ל־$(\star)$ כאשר $g = 0$ סגורה לחיבור וכפל בסקלר שכן אם x, y פתרונות ו־$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ נסתכל על

$$(\alpha x + \beta y)' = \alpha x' + \beta y' = \alpha A(t)x(t) + \beta A(t)y(t) = A(t)(\alpha x + \beta y)$$

שכן x, y פתרונות וזאת הוכחה עבור מימד 2 ושאר ההוכחה באינדוקציה על n ולכן $\alpha x + \beta y$ פתרון.

הוכחה: נסמן ב־e_k את הוקטור הסטנדרטי ונסמן ב־x_k את הפתרון ל־$(\star)$ עם תנאי ההתחלה $x_k(0) = \mathrm{e}_k$.
$\{x_k\}_{k=1}^n$ בלתי־תלויים שכן אם נניח שמתקיים $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j(t) = 0$ לכל t אז בפרט $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j(0) = 0$. מכיוון ש־$x_j(0) = \mathrm{e}_j$, קיבלנו $\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathrm{e}_j = 0$. מכך שוקטורי הבסיס הסטנדרטי בלתי־תלויים לינארית נסיק כי $\alpha_j = 0$ לכל j וקיבלנו בלתי־תלויות.
היא גם פורשת שכן אם y פתרון ולכן $y' = Ay$ וקיימים $\{B_j\}$ כך ש־$y(0) = \sum B_j \mathrm{e}_j$ ומיחידות $y(t) = \sum B_j x_j(t)$ לכל $t \in I$ וקיבלנו שהקבוצה פורשת.
□

נתבונן במשוואה הומוגונית עם מקדמים קבועים, כלומר $x'(t) = A \cdot x(t)$ כאשר A מטריצה קבועה שאינה תלויה ב־t ו־$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ונניח ש־$x(0) = x_0$.
ננסה להפעיל את איטרציות פיקארד

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t Ax_0(s)\,\mathrm{d}s = x_0 + A\int_0^t x_0 = x_0 + Atx_0$$
$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t x_1(s)\,\mathrm{d}s = x_0 + Atx_0 + \frac{A^2t^2}{2}x_0$$
$$\vdots$$
$$x_n(t) = \sum_{i=0}^n \frac{A^n t^n x_0}{n!} = \left(\mathrm{Id} + At + \cdots + \frac{A^n t^n}{n!}\right)x_0$$

מפיקארד התהליך הזה מתכנס ונסמן את הגבול ב־$\exp(tA) \cdot x_0$ (זה בעצם אקספוננט שמציבים בפנים וקטור).

הגדרה 1.22

לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ נגדיר את $\exp(A) = \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{k!}$ כאשר $A^0 = \mathrm{Id}$.

טענה 1.23

הטור לעיל מתכנס.

הוכחה: נראה זאת בנורמת אינסוף שכן בלאו הכי כל הנורמות שקולות ומספיק להוכיח שסדרת הסכומים האלו היא סדרת קושי, ואכן

$$\left\|\sum_{k=0}^t \frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^s \frac{A^k}{k!}\right\|_{op} \le \sum_{k=s+1}^t \frac{1}{k!}\|A^k\|_{op} \le \sum_{k=s+1}^t \frac{1}{k!}\|A\|_{op}^k$$

מהיות $e^{\|A\|_{op}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\|A\|_{op}^k < \infty$ זה קטן כרצוננו עבור s, t מספיק גדולים. □

טענה 1.24

אם $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש־$AB = BA$ אזי $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

הוכחה: ממכפלת קושי לטורים ואך ורק בגלל ש־$AB = BA$ ניתן להשתמש בבינום של ניוטון (אחרת הוא לא נכון)

$$\exp(A)\exp(B) = \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{k!}\sum_{k=0}^\infty \frac{B^k}{k!} = \sum_{n=0}^\infty \sum_{i+j=n} \frac{A^i}{i!}\cdot\frac{B^j}{j!} = \sum_{n=0}^\infty \sum_{i+j=n} \binom{n}{j}\frac{A^i}{i!}\cdot\frac{B^j}{j!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(A+B)^n = \exp(A+B)$$

□

מסקנה 1.25

אם $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אז $\exp(A)$ מטריצה הפיכה ו־$(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.

הוכחה: A ו־$-A$ מתחלפות ולכן מהטענה הקודמת

$$\mathrm{Id} = \exp(0) = \exp(A + (-A)) = \exp(A) \cdot \exp(-A)$$

□

מסקנה 1.26

לכל $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ההעתקה $t \mapsto \exp(tA)$ (זו ההעתקה $\mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) היא הומומורפיזם של חבורות.

הוכחה: לכל $s, t \in \mathbb{R}$, tA ו־sA מתחלפות ואז $(t+s) \mapsto \exp((t+s)A)$ אבל גם מתקיים

$$\exp((t+s)A) = \exp(tA + sA) = \exp(tA) \cdot \exp(sA)$$

□

עד כה ראינו שעבור

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

מתקיים ש־$x(t) = \exp(tA)x_0$ הוא פתרון למשוואה על קטע (אולי קטן) סביב 0 אבל $\exp(tA)x_0$ מוגדר לכל t והפתרון מוגדר לכל $t \in I$ וטבעי לשאול האם הם מתלכדים – התשובה לכך היא כן.

טענה 1.27

יהי y הפתרון המקסימלי למשוואה

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ו־$x(t) = \exp(tA)x_0$. אז $y(t) = \exp(tA)x_0$ לכל $t \in I$.

הוכחה: נניח שלא ויש $t > 0$ כך ש־$y(t) \neq x(t)$ ונסמן $\tau := \inf\{t > 0 \mid x(t) \neq y(t)\}$.
מתקיים $\tau > 0$ כי אנו יודעים שבאיזשהי סביבה ימנית שבה הם מסכימים. נראה שיש סביבה של τ שבה x, y מסכימים ונקבל סתירה.
נסמן $z_* = \exp(\tau A)x_0$ ונתבונן בבעיה

$$(\star\star) \begin{cases} z'(t) = Az(t) \\ z(\tau) = z_* \end{cases}$$

מאיטרציות פיקארד ידוע שיש סביבה $0 < \delta$ של τ כך ש־$z(t) = \exp((t-\tau)A)z_*$ הוא הפיתרון היחיד לבעיה $(\star\star)$.
נשים לב שמתקיים $x(\tau) = y(\tau)$ שכן זה אינפימום היכן שהם לא שווים ומרציפות ו־$y(\tau) = \exp(\tau A)x_0$ ולכן y, z מתלכדים על סביבה זו של τ.
מצד שני, על הסביבה הזו מתקיים

$$z(t) = \exp((t-\tau)A)z_* = \exp((t-\tau)A)\exp(\tau A)x_0 = \exp(tA - \tau A + \tau A)x_0 = \exp(tA)x_0 = x(t)$$

מהגדרה וזו כמובן סתירה. □

איך מחשבים את $\exp(tA)$? נשים לב ש־P מטריצה הפיכה ואז $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$ שכן $PP^{-1} = \mathrm{Id}$ ואז $(PAP^{-1})^k = A^k$.
שנית, אם A אלכסונית אז

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

שלישית, פעולת האקספוננט מכבדת חלוקה לבלוקים, כלומר

$$\exp\begin{pmatrix} \square & & & 0 \\ & \square & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\square & & & 0 \\ & \exp\square & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp\square \end{pmatrix}$$

טענה 1.28

לכל בלוק ז'ורדן $J_\lambda \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מתקיים

$$\exp(tJ_\lambda) = e^{t\lambda}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

הוכחה: באינדוקציה על k רואים שמתקיים

$$(tJ_\lambda)^k = t^k\begin{pmatrix} \binom{k}{0}\lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \dots & \binom{k}{n}\lambda^{k-n} \\ & \binom{k}{0}\lambda^k & \dots & \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \binom{k}{0}\lambda^k \end{pmatrix}$$

כאשר $\binom{k}{j} = 0$ לכל $k < j$ ומכאן מתקיים

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tJ_\lambda)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} \binom{k}{0}\frac{t^k}{k!}\lambda^k & \binom{k}{1}\frac{t^k}{k!}\lambda^{k-1} & \dots & \binom{k}{n}\frac{t^k}{k!}\lambda^{k-n} \\ & \binom{k}{0}\frac{t^k}{k!}\lambda^k & \dots & \binom{k}{n-1}\frac{t^k}{k!}\lambda^{k-n+1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \binom{k}{0}\frac{t^k}{k!}\lambda^k \end{pmatrix}$$

התא ה־j בשורה הראשונה של המטריצה המתקבלת הוא

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k}{j-1}\frac{t^k}{k!}\lambda^{k-j+1} = t^{j-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k-j+1}\lambda^{k-j+1}}{(j-1)!(k-j+1)!} = e^{t\lambda}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}$$

על־ידי הצבה של הפיתוח הזה בכל אחד מהתאים במטריצה הנוסחה נובעת. □

סוף הרצאה 7 – 04/05

הערה

נניח ש־$A = PJ_\lambda P^{-1}$ כלומר $\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ כאשר $\{v_i\}_{i=1}^n$ הוקטורים העצמיים המוכללים שמתאימים לבלוק ז'ורדן עבור J_λ, כלומר מקיימים $Av_1 = \lambda v_1$, $Av_i = \lambda v_i + v_{i-1}$ לכל $2 \le i \le m$ אז מהחשבון הקודם נובע לכל i

$$\begin{aligned} \exp(tA)v_i &= P\exp(tJ_\lambda)P^{-1}v_i \\ &= P\exp(tJ_\lambda)\,\mathrm{e}_i \\ &= e^{\lambda t}P\left(\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}, \frac{t^{i-2}}{(i-2)!}, \dots, \frac{t^{i-i}}{(i-i)!}, 0, \dots, 0\right)^T \\ &= e^{\lambda t}\cdot\left(\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}v_1 + \frac{t^{i-2}}{(i-2)!}v_2 + \dots + \frac{t^{i-i}}{(i-i)!}v_i\right) \end{aligned}$$

לכל וקטור שהוא צירוף לינארי של הוקטורים $v_1, \dots, v_n$ כשמופעלים על $\exp(tA)$ הוא צירוף לינארי של הוקטורים העצמיים המוכללים.
קיבלנו אלגוריתם לחישוב של $\exp(tA)(x_0)$ לכל x_0 בתנאי שאנחנו יודעים לז'רדן את A עבור $x_0 = \sum \alpha_i v_i$.
אנחנו מתעניינים ב־A ממשית ובפתרונות ל־$x(t) = A(x)$ עם תנאי התחלה ממשיים ובפרט אנחנו יודעים ש־$x(t) = \exp(t(A))(x) \in \mathbb{R}^n$ לכל x אם $x \in \mathbb{R}^n$.
מהיות A מטריצה ממשית, אם $Av = \lambda v$ ו־$\lambda \notin \mathbb{R}$ אז $\overline{\lambda} \notin \mathbb{R}$ וגם $A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$ כלומר λ ערך עצמי אם ורק אם $\overline{\lambda}$ הוא ערך עצמי ואז $Re\, v = \frac{v+\overline{v}}{2} \in \mathrm{Span}\{v, \overline{v}\}$
ואם נפעיל עליו את $\exp(tA)$ אז ממה שראינו אפשר לתת אותו על־ידי צירוף לינארי של $v, \overline{v}$.
באותו אופן, $Im\, v = \frac{v-\overline{v}}{2} \in \mathrm{Span}\{v, \overline{v}\}$ ויתרה מזאת $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v, \overline{v}\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{Im\, v, Re\, v\}$ ולכן כל וקטור x_0 ניתן להצגה כצירוף לינארי עם מקדמים מרוכבים של הוקטורים העצמיים המוכללים של A ולכן אם נכתוב את $x_0 = \sum \alpha_i v_i$ כאשר $\{v_i\}$ הם הוקטורים העצמיים המוכללים נקבל

$$\exp(tA)v = \sum \alpha_i \exp(tA)v_i$$

דוגמה

נניח של־A יש ערך עצמי מרוכב $\lambda = \mu + i\nu$ (כאשר $\nu \neq 0$) ויהי $v + iw$ וקטור עצמי שמתאים לו. אז מנוסחת אוילר

$$e^{\lambda t}(v + iw) = e^{\mu t}(\cos(\nu t)v - \sin(\nu t)w) + ie^{\mu t}(\sin(\nu t)v + \cos(\nu t)w)$$

כל פתרון ממשי שהוא צירוף לינארי מהצורה $\alpha e^{\lambda t}(v + iw) + \beta e^{\overline{\lambda} t}(v - iw)$, ניתן לכתיבה על־ידי

$$ae^{\mu t}(\cos(\nu t)v - \sin(\nu t)w) + be^{\mu t}(\sin(\nu t)v + \cos(\nu t)w)$$

באופן שקול, בכתיב מטריציוני

$$e^{\mu t}\begin{pmatrix} | & | \\ v & w \\ | & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\nu t) & \sin(\nu t) \\ -\sin(\nu t) & \cos(\nu t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

אם $\mu = 0$ אז תנאי ההתחלה הוא בדיוק $x_0 = av + bw$ והנורמה נשארת חסומה.
אם $\mu > 0$, ככל שהזמן מתקדם קדימה נקבל ספירלה מתרחבת, ואם $\mu < 0$ ככל שהזמן מתקדם נקבל ספירלה מתכנסת פנימה. קרי, החלק המרוכב עושה סיבוב והחלק הממשי מחליט אם הפתרון גדל או דועך. נוכיח ש־v, w (החלק הממשי והמדומה של הוקטור העצמי) הם בלתי־תלויים מעל $\mathbb{R}$.
נניח בשלילה שהם תלויים. מאחר שהם וקטורים ממשיים, קיים $t \in \mathbb{R}$ כך ש־$w = tv$, ולכן הוקטור העצמי הוא:

$$v + iw = v + itv = (1 + it)v$$

כלומר הוקטור העצמי הוא כפולה מרוכבת של וקטור ממשי v. מאחר ש־$A(v + iw) = \lambda(v + iw)$ נקבל:

$$A((1 + it)v) = \lambda(1 + it)v \Longrightarrow (1 + it)Av = \lambda(1 + it)v \Longrightarrow Av = \lambda v$$

אבל A מטריצה ממשית וגם v וקטור ממשי, ולכן Av חייב להיות ממשי. זה עומד בסתירה לכך ש־λ אינו ממשי (שכן $\nu \neq 0$) ו־$v \neq 0$.

סוף הרצאה 8 – 05/05

1.5 משוואות לינאריות לא הומגניות

באופן כללי אנחנו לא יודעים איך לפתור משוואות לינאריות הומוגניות ללא מקדמים קבועים אבל בתנאים מסויימים אנחנו כן יודעים (דוגמה בתרגיל הבית).
נניח שיש לנו

$$\begin{cases} (\star)\ x'(t) = A(t)x(t) \\ (\star\star)\ x'(t) = A(t)x(t) + g(t) \end{cases}$$

כאשר אנחנו יודעים לפתור את $(\star)$ ו־$(\star\star)$ זו משוואה לא הומוגנית כאשר $A(t)$ היא $n \times n$.
יהיו $\{x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\}$ בסיס למרחב הפתרונות של $(\star)$.
הרעיון הוא לכתוב פיתרון כללי למשוואה לא הומוגנית $(\star\star)$ כצירוף לינארי של ה־$x_i(t)$־ים עם מקדמים שמשתנים בזמן, כלומר נכתוב את $y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t)x_j(t)$ כפתרון ל־$(\star\star)$ עם מקדמים שתלויים בזמן (אם זה היה α_j בלי תלות ב־t זה היה הפיתרון הכללי עבור משוואה הומגנית).
נסמן ב־$\pi(t)$ את מטריצת הפתרונות היסודית (היא הפיכה כי היא בסיס למרחב הפתרונות)

$$\pi(t) = \begin{pmatrix} | & | & ... & | \\ x_1(t) & x_2(t) & ... & x_n(t) \\ | & | & ... & | \end{pmatrix}$$

נשים לב ש־$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t)x_j(t) = \pi(t)\alpha(t)$ כאשר $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}$.
אם $y(t) = \pi(t)\alpha(t)$ פותר את $(\star\star)$ אז $y(0) = \pi(0)\alpha(0)$ אז $y'(t)$ מקיים את $(\star\star)$ אבל מצד שני מכך ש־π' מקיימת את המשוואה ההומגנית

$$y'(t) = (\pi(t)\alpha(t))' = \pi'(t)\alpha(t) + \pi(t)\alpha'(t) = A(t)\pi(t)\alpha(t) + \pi(t)\alpha'(t)$$

כלומר

$$\cancel{A(t)y(t)} + g(t) = y'(t) = A(t)\underbrace{\pi(t)\alpha(t)}_{=y(t)} + \pi(t)\alpha'(t) = \cancel{A(t)y(t)} + \pi(t)\alpha'(t)$$

לכן קיבלנו שתנאי הכרחי על α היינו

$$\pi(t)\alpha'(t) = g(t) \Longrightarrow \alpha'(t) = \pi(t)^{-1}g(t)$$

אם כך, מהמשפט היסודי נקבל את התנאי ההכרחי הבא וצריך להראות שהוא אכן פיתרון

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \int_0^t \pi(s)^{-1}g(s)\,\mathrm{d}s$$

משפט 1.29

יהיו $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ רציפה ו־$g : I \to \mathbb{R}^n$ רציפה כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ונסמן ב־$\pi(t)$ את מטריצת הפתרונות היסודית למשוואה $x'(t) = A(t)x(t)$.
אזי פונקציה $y(t) = \pi(t)\left(\alpha(0) + \int_0^t \pi(s)^{-1}g(s)\,\mathrm{d}s\right)$ פותרת את המשוואה $y'(t) = A(t)x(t) + g(t)$ עם תנאי ההתחלה $y(0) = \pi(0)\alpha(0)$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \left[\pi(t)\left(\alpha(0) + \int_0^t \pi(s)^{-1}g(s)\,\mathrm{d}s\right)\right]' \\
&= \pi'(t)\left(\alpha(0) + \int_0^t \pi(s)^{-1}g(s)\,\mathrm{d}s\right) + \pi(t)\pi(t)^{-1}g(t) \\
&= A(t)\pi(t)\left(\alpha(0) + \int_0^t \pi(s)^{-1}g(s)\,\mathrm{d}s\right) + g(t) \\
&= A(t)y(t) + g(t)
\end{aligned}$$

□

מסקנה 1.30 עקרון דוהמל

נניח שמטריצת המקדמים קבועה כלומר $A(t) = A$ ו־$x_i(0) = \mathrm{e}_i$ (הבסיס הסטנדרטי ב־0) אז $\pi(t) = e^{tA}$ ו־$\pi(0) = \mathrm{Id}$ ונקבל

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s)\,\mathrm{d}s$$

1.6 התנהגות לוקלית, התנהגות גלובלית ויציבות

לאורך פרק זה יש לנו $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות והסימון הרגיל של $\Phi(p,t) = \varphi_t(p) = x_p(t)$ היא הנקודה בה נמצא הפיתרון של $x' = F(x)$ עם תנאי התחלה p לאחר זמן t.

משפט 1.31

תהיי $p \in U$ ונניח ש־$F(p) \neq 0$.
אזי קיימות קבוצות פתוחות $p \in U_0 \subseteq U_1 \subseteq U$, V פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$ כך ש־$0 \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ ודיפאומורפיזם גזיר ברציפות $\alpha : U_1 \to V$ ו־$\delta > 0$ כך ש־$\alpha(p) = 0$
ולכל $x \in U_0$ ו־$t \in (-\delta,\delta)$ מתקיים $\varphi_t(x) \in U_1$ ו־$\alpha(\varphi_t(x)) = \alpha(x) + (t,0,...,0)$.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות נניח ש־$p = 0$ ונתבונן בנגזרות החלקיות של $\Phi(t,x)$ בנקודה $p = 0, t = 0$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}\,|_{(0,0)} = F(0) \neq 0 \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\,|_{(0,0)} = \mathrm{e}_i$$

היות ש־$F(0) \neq 0$ ניתן לבחור $n-1$ איברים מאיברי $(\mathrm{e}_1,...,\mathrm{e}_n)$ ונסמנם $\mathrm{e}_{i_1},...,\mathrm{e}_{i_{n-1}}$ כך שבלי הגבלת הכלליות $\left(F(0),\mathrm{e}_{i_1},...,e_{i_{n-1}}\right)$ זה בסיס.
נגדיר העתקה $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ סביבת 0 ב־$\mathbb{R}^n$ על־ידי $\beta(t,x_1,...,x_{n-1}) = \varphi_t(x_1,x_2,...,x_{n-1},0)$.
ממשפט הפונקציה ההפוכה יש סביבה $p \in U_1$ וסביבה $0 \in V$ כך ש־$\beta : V \to U_1$ היא דיפאומורפיזם גזיר ברציפות ונגדיר $\alpha = \beta^{-1}$.
קיימת סביבה פתוחה $p \in U_0 \subseteq U_1$ ו־$\delta > 0$ כך שלכל $x \in U_0$ ו־$t \in (-\delta,\delta)$ מתקיים $\varphi_t(x) \in U_1$.
נשאר לבדוק: יהי $x \in U_0$ אז יש $s, y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ כך ש־$x = \beta(s,y_1,...,y_{n-1})$ כלומר $x = \varphi_s(y_1,...,y_{n-1},0)$ ואז עבור $|t| < \delta$ מתקיים $\varphi_t(x) \in U_1$ ולכן

$$\begin{aligned}
\alpha(\varphi_t(x)) = \alpha(\varphi_t(\varphi_s(y_1,...,y_{n-1},0))) = \alpha(\varphi_{t+s}(y_1,...,y_{n-1},0)) = \alpha(\beta(t+s,y_1,...,y_{n-1})) = (s,y_1,...,y_{n-1}) + (t,0,...,0) \\
= \alpha(x) + (t,0,...,0)
\end{aligned}$$

□

הגדרה 1.32 נקודת שיווי משקל

הנקודה $p \in U$ נקראת נקודת שיווי משקל (לפעמיים נקודת שבת) אם $F(p) = 0$.

הגדרה 1.33 נקודת שיווי משקל יציבה

נקודת שיווי משקל p תקרא נקודת שיווי משקל יציבה אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל $q \in B_\delta(p)$ ולכל $t > 0$ מתקיים $\varphi_t(q) \in B_\varepsilon(p)$.

הגדרה 1.34 נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית

נקודת שיווי משקל p תקרא נקודת שיווי משקל אסימפטוטית אם p יציבה וקיימת גם $\eta > 0$ כך שלכל $q \in B_\eta(p)$ מתקיים $\lim_{t\to\infty}\varphi_t(q) = p$.

משפט 1.35 **הקריטריון הלינארי ליציבות אסימפטוטית**

תהיי $p \in U$ נקודת שיווי משקל של F ונניח שלכל ערך עצמי של $DF(p)$ יש חלק ממשי שלילי. אזי p יציבה אסימפטוטית.

למה 1.36

תהיי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה עם קבוצת ערכים עצמיים $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ונניח ש־$\max_{\lambda\in\Lambda} Re(\lambda) < 0$.
אזי לכל $0 < \alpha < \min_{\lambda\in\Lambda}|Re(\lambda)|$ יש $C > 0$ כך שלכל $t \geq 0$ מתקיים $\|\exp(tA)\|_{op} \leq Ce^{-t\alpha}$ ובפרט $\lim_{t\to\infty} \exp(tA) = 0$.

הוכחה: נניח ש־$J = PAP^{-1}$ צורת ז'ורדן של A ואז $J + \alpha I$ היא מטריצה בצורדת ז'ורדן שלכל ערכייה העצמיים חלק ממשי שלילי ולכן עבור $t \geq 0$ הערכים של $\exp(t(J + \alpha I))$ הם פולינומים ב־t כפול אקספוננט עם מעריך שלילי ב־t ולכן קיים $C' > 0$ כך שמתקיים

$$\sup_{t\geq 0} \|\exp(t(J + \alpha I))\|_{op} \leq C'$$

לכן

$$\begin{aligned}
\|\exp(tA)\|_{op} &= \left\|\exp(tP^{-1}JP)\right\|_{op} \\
&\leq \|P\|_{op}\left\|P^{-1}\right\|_{op}\|\exp(tJ)\|_{op} \\
&= \|P\|_{op}\left\|P^{-1}\right\|_{op}\|\exp(tJ + t\alpha I - t\alpha I)\|_{op} \\
&= \|P\|_{op}\left\|P^{-1}\right\|_{op}\|\exp(t(J + \alpha I))\|_{op} \cdot e^{-t\alpha} \\
&\leq C' \cdot e^{-t\alpha}
\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מתכונת החילופיות של האקספוננט למטריצות מתחלפות. □

סוף הרצאה 9 – 11/05

הוכחה של משפט 1.35, הקריטריון הלינארי ליציבות אסימפטוטית: כזכור לכל $t \in J_p^*$, $\varphi_t(x)$ גזירה ב־p ו־$D\varphi_t(p)$ מקיימת

$$(\star)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[D\varphi_t(p)] = DF(\varphi_t(p))D\varphi_t(p), \quad D\varphi_0(p) = \mathrm{Id}$$

כאשר קראנו ל־$D\varphi_t(p) = M$ בעבר.
אבל p נקודת שיווי משקל כלומר $F(p) = 0$ ולכן $\varphi_t(p) = p$ לכל t ומכאן נובע ש־$(\star)$ היא משוואה לינארית במקדמים קבועים ולכן $M' = DF(p)M$ ולכן

$$D\varphi_t(p) = \exp(tDF(p))$$

בפרט מלמה 1.36 נובע ש־$\|\exp(tDF(p))\|_{op} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ ולכן יש $T > 0$ שעבורו

$$\|\exp(TDF(p))\|_{op} < \frac{1}{4}$$

יהי $\varepsilon > 0$ וקיימת $\delta > 0$ כך שלכל $q \in B_\delta(p)$ ולכן $t \in [0, T]$ מתקיים $\varphi_t(q) \in B_\varepsilon(p)$ (מתלות רציפה בתנאי ההתחלה).
בנוסף מהקירוב הלינארי

$$\varphi_T(q) = \varphi_T(p) + D\varphi_T(p)(q - p) + +o(\|q - p\|)$$

ולכן על־ידי הקטנה של δ אם צריך נוכל להניח שהמחובר $o(p - q)$ לא עולה על $\frac{1}{4}\|p - q\|_{op}$, כלומר

$$\|\varphi_T(q) - \varphi_T(p)\|_{op} \leq \frac{\|q - p\|_{op}}{2}$$

בפרט $\varphi_T(q) \in B_\delta(p)$ שכן $\varphi_T(p) = p$ ושוב לכל $0 \leq t \leq T$ מתקיים $\varphi_{T+t}(q) \in B_\varepsilon(p)$ (שוב מהרציפות בתנאי ההתחלה) ואם נחזור על התהליך נקבל

$$\|\varphi_{kT}(q) - p\|_{op} \leq 2^{-k}\|q - p\|$$

לכל $t \in [0, T]$ ולכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $\varphi_{kT+t}(q) \in B_\varepsilon(p)$ כלומר לכל $t > 0$ מתקיים $\varphi_t(q) \in B_\varepsilon(p)$ וזו בידיוק ההגדרה של יציבות.
נשאר להראות יציבות אסימפטוטית: קיבלנו ש־$\varphi_{kT}(q) \xrightarrow[k\to\infty]{} p$ לכל $q \in B_\delta(p)$ ושוב מתלות רציפה בתנאי התחלה נקבל $\lim_{t\to\infty} \varphi_t(q) = p$ שכן לכל $\varepsilon' > 0$ יש $\delta' > 0$ כך שאם $y \in B_{\delta'}(p)$ אז לכל $t \in [0, T]$ נקבל

$$\|\varphi_t(y) - p\|_{op} < \varepsilon'$$

□

הגדרה 1.37 **פונקציית ליאפונוב**

יהי $B \subseteq \Omega$ כדור סביב p. נאמר ש־$L : B \to \mathbb{R}$ גזירה ברציפות היא פונקציית ליאפונוב ל־F ב־p אם $\langle \nabla L(x), F(x) \rangle \leq 0$ לכל $x \in B$ ול־L יש מינימום חזק ב־p (כלומר $L(p) \leq L(x)$ עם שיוויון אם ורק אם $x = p$).
נאמר ש־L היא פונקציית ליאפונוב חזקה אם היא פונקציית ליאפונוב ומתקיים בנוסף $\langle \nabla L(x), F(x) \rangle < 0$ לכל $x \neq p$.

משפט 1.38 **משפט ליאפונוב**

תהיי $x_0 \in U$ נקודת שיווי משקל של F. אם ל־F יש פונקציית ליאפונוב ב־x_0 אז x_0 יציבה ואם ל־F יש פונקציית ליאפונוב חזקה ב־x_0 אז x_0 יציבה אסימפטוטית.

סוף הרצאה 10 – 12/05

הוכחה: <u>אם יש פונקציית ליאפונוב אז יש יציבות:</u> יהי $r > 0$ ו־$L \in C^1(B(x_0, r))$ פונקציית ליאפונוב.
נשים לב שלכל $p \in B(x_0, r)$ הפונקציה $L(x_p(t))$ מונוטונית יורדת לכל זמן שהיא מוגדרת מהגדרת פונקציית ליאפונוב ומכלל השרשרת

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(L(x_p(t))\big) = \langle \nabla L(x_p(t)), x_p'(t) \rangle = \langle \nabla L(x_p(t)), F(x_p(t)) \rangle \leq 0$$

יהי $r > \varepsilon > 0$. מכך ש־x_0 מינימום חזק של L נקבל $L(x_0) < \min_{x \in \partial B(x_0, \varepsilon)} L(x)$ ולכן קיימת $\delta > 0$ כך ש־$\max_{x \in B(x_0, \delta)} L(x) < \min_{x \in \partial B(x_0, \varepsilon)} L(x)$.
כעת, אם $p \in B(x_0, \delta)$ ויש $t > 0$ שעבורו $x_p(t) \notin B(x_0, \varepsilon)$ אז קיים t_* כך ש־$x_p(t_*) \in \partial B(x_0, \varepsilon)$ ו־$L(x_p(t_*)) > L(x_p(0)) = L(p)$ בסתירה למונוטוניות.
<u>אם יש ליאפונוב חזקה אז יש יציבות אסימפטוטית:</u> יהי $0 < R < r$ ומהיציבות לעיל יש $\eta > 0$ כך שלכל $p \in B(x_0, \eta)$ ולכל $t \geq 0$ מתקיים ש־$x_p(t) \in B(x_0, R)$.
נרצה להראות שלכל $p \in B(x_0, \eta)$ מתקיים ש־$x_p(t) \to x_0$ שכן אם לא יש $p \in B(x_0, \eta)$ ויש $\varepsilon > 0$ וסדרת זמנים $t_k \to \infty$ כך ש־$d(x_p(t_k), x_0) \geq \varepsilon$ ונסמן

$$M := \max_{x \in B(x_0, R)} \|F(x)\|, \quad C := \max\Big\{ \langle \nabla L(x), F(x) \rangle \mid \frac{\varepsilon}{2} \leq \|x - x_0\| \leq R \Big\} < 0$$

נשים לב שאם $\|x_p(t) - x_0\| > \varepsilon$ אז לכל $t \leq s \leq t + \frac{\varepsilon}{2M}$ מתקיים ש־$\|x_p(s) - x_0\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ מאי־שיוויון המשולש ההפוך שכן

$$\|x_p(s) - x_p(t)\| = \left\| \int_t^s x_p'(u)\,\mathrm{d}u \right\| \leq M|s - t| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|x_p(s) - x_0\| \geq \big| \|x_p(s) - x_p(t)\| - \|x_p(t) - x_0\| \big| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

כעת נניח על־ידי צמצום לתת־סדרה (אם צריך) ש־$|t_{k+1} - t_k| < \frac{\varepsilon}{2M}$ ונחשב את $L(x_p(t))$ עבור $t > 0$

$$\begin{aligned}
L(x_p(t)) &= L(p) + \int_0^t \big(L(x_p(s))\big)'\,\mathrm{d}s \\
&= L(p) + \int_0^t \langle \nabla L(x_p(s)), F(x_p(s)) \rangle\,\mathrm{d}s \\
&\leq L(p) + \sum_{k=1}^{n \mid t_{n+1} \leq t} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \langle \nabla L(x_p(s)), F(x_p(s)) \rangle\,\mathrm{d}s \\
&\leq L(p) + \sum_{k=1}^{n \mid t_{n+1} \leq t} \int_{t_k}^{t_k + \frac{\varepsilon}{2M}} \langle \nabla L(x_p(s)), F(x_p(s)) \rangle\,\mathrm{d}s \\
&= L(p) + \sum_{k=1}^{n \mid t_{n+1} \leq t} C \cdot \frac{\varepsilon}{2M} \xrightarrow[t \to \infty]{} -\infty
\end{aligned}$$

אבל זאת סתירה כי L חסומה ב־$\overline{B_R(x_0)}$ לכן לכל $p \in B_\eta(x_0)$ מתקיים $x_p(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} x_0$. □

דוגמה

נניח ש־$H : U \to \mathbb{R}$ גזירה ברציפות (כרגיל U פתוחה) ו־J מטריצה אנטי־סימטרית ($J^t = -J$) ונגדיר $F = J(\nabla H)$ אז H פונקציית ליאפונוב (לא חזקה) עבור F היכן ש־x_0 היא נקודת מינימום של H (ברור שאם x_0 מינימום של H אז $F(x_0) = 0$) ו־H פונקציית ליאפונוב שכן

$$\langle F, \nabla H \rangle = \langle J\nabla H, \nabla H \rangle = \langle \nabla H, J^t \nabla H \rangle = \langle J^t \nabla H, \nabla H \rangle = -\langle J\nabla H, \nabla H \rangle = 0$$

אז x_0 נקודת שיווי משקל יציבה. האם ייתכן ש־x_0 נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית? לא ייתכן דבר כזה שכן $\langle F, \nabla H \rangle = 0$ אומר ש־H נשארת קבועה לאורך המסלולים (זה בעצם קווי גובה) למה? כי

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x_p(t)) = \langle \nabla H, x_p'(t) \rangle = \langle \nabla H, F \rangle = 0$$

נניח שהכוח משמר כלומר $-\nabla V = f = ma$ (עבור f כוח, m מסה ו־a תאוצה) ונסמן את המיקום ב־q והתנע זה $p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}mq$.
בהינתן N גופים תלת־מימדיים יש $3N$ קורדינאטות מיקומים ו־$3N$ קורדינאטות של תנעים $x = (q_1, ..., q_{3N}, p_1, ..., p_{3N})$ ונרצה לתאר את זה כפונקציה של זמן

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_i = (-\nabla V)_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_i = \frac{p_i}{m} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{p_i^2}{2m}\right)$$

נסכום

$$H = \underbrace{\sum_{i=1}^{3N}\frac{p_i^2}{2m}}_{\text{אנרגיה קינטית}} + \underbrace{V(q_1, ...q_{3N})}_{\text{אנרגיה פוטנציאלית}}$$

ומגזירה נקבל

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{3N} \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{3N} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I_{3N} \\ -I_{3N} & 0 \end{pmatrix}}_{6N\times 6N}\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{\partial H}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_{3N}} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_{3N}} \end{pmatrix}$$

המסקנה היא שתחת כוח משמר (שתלוי רק במיקום) נובע ש־H קבועה לאורך המסילות (כלומר בזמן המערכת) ולכן H נקראת האנרגיה של המערכת (או ההמילטוניאן).

משפט 1.39 **הקריטריון הלינארי לאי־יציבות**

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ שדה גזיר ברציפות ו־$x_o \in U$ נקודת שיווי משקל. אם ל־$DF(x_0)$ יש ערך עצמי עם חלק ממשי חיובי אז x_0 לא יציבה.

הוכחה: נוכיח את המשפט תחת ההנחה שלכל הערכים העצמיים של $A := DF(x_0)$ יש חלק ממשי שאינו אפס כלומר אין ל־A ערכים עצמיים עם חלק ממשי אפס.
נסמן H_+ יהיה תת־המרחב של $\mathbb{R}^n$ הנפרש על־ידי הוקטורים העצמיים (המוכללים אם צריך) עם ערך עצמי שלו חלק ממשי גדול מאפס ו־H_- עם ערך עצמי שלו חלק ממשי קטן מאפס ומההנחה $\mathbb{R}^n = H_+ \oplus H_-$ ונסמן ב־$\pi_\pm$ את ההטלות המתאימות לסכום הישר (ההנחה של המשפט אומר ש־$H_+ \neq \{0\}$).

סוף הרצאה 11 – 18/05

נניח ש־$x_0 = 0$ ונניח בשלילה ש־0 יציבה, כלומר: לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שאם $p \in B_\delta(0)$ אז $x_p(t) \in B_\varepsilon(0)$.
נגדיר את הפונקציה $g(x) = F(x) - Ax$ כך שיתקיים

$$x'(t) = F(x(t)) = Ax(t) + g(x(t))$$

לכן ניתן לכתוב את הפתרון למשוואה באופן הבא (עקרון דוהמל)

$$(\star\star)\ x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} g(x(s))\,\mathrm{d}s$$

להמשך ההוכחה אנחנו צריכים שתי למות

למה 1.40

קיים $R > 0$ כך שאם $x : [0,\infty) \to B_R(0)$ פותרת את המשוואה $x'(t) = F(x(t))$ אז

$$x(t) = e^{tA}\pi_-(x(0)) + \int_0^t e^{(t-s)A}\pi_- g(x(s))\,\mathrm{d}s - \int_t^\infty e^{(t-s)A}\pi_+ g(x(s))\,\mathrm{d}s$$

הוכחה של למה 1.40: נשים לב

$$F(x) = F(0) + A(x + o(\|x\|))$$

ולכן מכך ש־$F(0) = 0$

$$g(x) = F(x) - Ax = o(\|x\|)$$

בפרט, מהגדרת הגבול יש $R > 0$ כך שלכל $x \in B_R(0)$ מתקיים $\|g(x)\| \leq \|x\|$ $(\heartsuit)$.
נכפול את $(\star\star)$ ב־e^{-tA} ונפעיל את π_+ ונקבל (כי π_+ זו העתקה לינארית וגם אינטגרל הוא לינארי ובנוסף מתקיים $\pi_\pm e^{tA} = e^{tA}\pi_\pm$)

$$(\star\star\star)\ e^{-tA}\pi_+ x(t) = \pi_+(x(0)) + \int_0^t e^{-sA}\pi_+ g(x(s))\,\mathrm{d}s \Longrightarrow \pi_+(x(0)) = -\int_0^\infty e^{-sA}\pi_+ g(x(s))\,\mathrm{d}s$$

נרצה להראות את החץ מימין: קיים קבוע $C > 0$ המקיים $\|\pi_\pm\|_{op} \leq C$ כך שאם λ ערך עצמי של A $\mid$ $0 < \mu < \min\{|Re(\lambda)|\}$ נקבל

$$\forall t > 0,\ \left\|e^{tA}\pi_- x\right\| \leq Ce^{-\mu t}\|x\|$$
$$\forall t < 0,\ \left\|e^{tA}\pi_+ x\right\| \leq Ce^{-\mu |t|}\|x\|$$

לכן אם $x(t) \in B_r(0)$ לכל $t < 0$ נובע

$$\left\|e^{-tA}\pi_+(x(t))\right\| \leq C^2 e^{-\mu t} R \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

יחד עם $(\heartsuit)$ לכל $s > 0$ נקבל

$$\left\|e^{-sA}\pi_+ g(x(s))\right\| \leq C^2 e^{-s\mu} R$$

וזה אינטגרבילי ב־s ולכן ניתן ל־t לשאוף לאינסוף ב־$(\star\star\star)$ ונקבל את ההצדקה לחץ מימין.
בחזרה ל־$(\star\star)$ עם הפיצול לסכום ישר וממה שמצאנו לעיל נקבל

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA}\pi_+(x(0)) + e^{tA}\pi_-(x(0)) + \int_0^t e^{(t-s)A}\pi_- g(x(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t e^{(t-s)A}\pi_+ g(x(s))\,\mathrm{d}s \\ &= e^{tA}\pi_-(x(0)) + \int_0^t e^{(t-s)A}\pi_- g(x(s))\,\mathrm{d}s - \int_t^\infty e^{(t-s)A}\pi_+ g(x(s))\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$\square$

למה 1.41

קיים $R > R_0 > 0$ מהלמה הקודמת כך שאם $x, y : [0,\infty) \to B_{R_0}(0)$ הם פתרונות ל־$x' = F(x)$ כך ש־$\pi_-(x(0)) = \pi_-(y(0))$ אז $x(t) = y(t)$ לכל t.

הוכחה של למה 1.41: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $R > R_0 > 0$ (R מהלמה הקודמת) כך שלכל $z_1, z_2 \in B_{R_0}(0)$ מתקיים

$$\|g(z_1) - g(z_2)\| < \varepsilon \|z_1 - z_2\|$$

הערה

זה נובע מהגזירות ברציפות של F: כי לכל z_1, z_2 מתקיים

$$F(z_2) = F(z_1) + DF(z_1)(z_2 - z_1) + o(\|z_2 - z_1\|) = F(z_1) + A(z_2 - z_1) + (DF(z_1) - A)(z_2 - z_1) + o(\|z_2 - z_1\|)$$

לכן

$$g(z_2) - g(z_1) = (DF(z_1) - A)(z_2 - z_1) + o(\|z_2 - z_1\|)$$

סוף הרצאה 12 – 19/05

נקבע $R_0 = R_0(\varepsilon)$ עבור $\varepsilon = \varepsilon(C, \mu)$ עבור μ מהלמה הקודמת שנגדיר בהמשך.
נניח ש־x, y פתרונות עם $\pi_-(y(0)) = \pi_-(x(0))$ כך ש־$x \neq y$ ל־$t > 0$ ו־$x(t), y(t) \in B_{R_0}(0)$ ונסמן

$$d = \sup_{t \in [0,\infty)} \|x(t) - y(t)\|$$

היות ש־$R > R_0$ ו־$x(t), y(t) \in B_R(0)$ ל־$t > 0$ ובפרט המסקנה של הלמה הקודמת נכונה עבורם. כלומר

$$x(t) = e^{tA}\pi_-(x(0)) + \int_0^t e^{(t-s)A}\pi_-(g(x(s)))\,\mathrm{d}s - \int_t^\infty e^{(t-s)A}\pi_+(g(x(s)))\,\mathrm{d}s$$

וכנל עבור y. לכן

$$\begin{aligned}
\|x(t) - y(t)\| &= \left\| \int_0^t e^{(t-s)A}\pi_-(g(x(s)) - g(y(s)))\,\mathrm{d}s - \int_t^\infty e^{(t-s)A}\pi_+(g(x(s)) - g(y(s)))\,\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \int_0^t \left\| e^{(t-s)A}\pi_-(g(x(s)) - g(y(s))) \right\| + \int_t^\infty \left\| e^{(t-s)A}\pi_+(g(x(s)) - g(y(s))) \right\| \\
&\leq \int_0^t Ce^{-(t-s)\mu}\|g(x(s)) - g(y(s))\|\,\mathrm{d}s + \int_t^\infty Ce^{(t-s)\mu}\|g(x(s)) - g(y(s))\|\,\mathrm{d}s \\
&\leq \varepsilon \int_0^t Ce^{-(t-s)\mu}\|x(s) - y(s)\|\,\mathrm{d}s + \varepsilon \int_t^\infty Ce^{(t-s)\mu}\|x(s) - y(s)\|\,\mathrm{d}s \\
&\leq 2\varepsilon Cd \left(\int_0^t e^{-s\mu}\,\mathrm{d}s + \int_t^\infty e^{-s\mu}\,\mathrm{d}s \right) \\
&= 2\varepsilon Cd \int_0^\infty e^{-s\mu}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{2\varepsilon Cd}{\mu}
\end{aligned}$$

כאשר אי־השיוויון השני נובע מהלמה הקודמת.
אז נבחר $\varepsilon = \frac{\mu}{4C}$ ונקבל לעיל $\frac{d}{2}$ אבל זו סתירה כי זה אומר ש־$d = 0$ (נזכר ש־$\|x(t) - y(t)\| = d$). □

נבחין שההוכחה של למה 1.41 מראה שיציבות היא בלתי אפשרית.
שכן, אם x_0 נקודה יציבה אז קיימת $\eta > 0$ כך שלכל $p \in B_\eta(0)$ מתקיים $x_p(t) \in B_{R_0}(0)$ לכל $t > 0$.
בפרט, קיימים $x \neq y$ כמו בלמה עם $\pi_-(x) = \pi_-(y)$ ולכן $x(0) = y(0)$. □

2 מערכות שטורם־ליוביל

2.1 מוטיבציה קצרה

מה המשוואה שמתארת את התזוזה של מיתר? היא נתונה על־ידי $u = (x,t)$ ומתקיים

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

c הוא קבוע פיזיקלי ועבורנו הוא 1.
נניח שניתן לכתוב פתרון u בצורה $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$ אז

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi(x)\psi''(t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x)\psi(t)$$
$$\implies \varphi(x)\psi''(t) = \varphi''(x)\psi(t) \iff \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)} = \lambda$$

כלומר $\psi''(t) = \lambda\psi(t)$ וגם $\varphi''(x) = \lambda\varphi(x)$.
מה התנאים הטבעיים שהמיתר מספר לנו?

$$\forall t,\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

אז

$$u(x,0) = f(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

התנאי שלנו של $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ זה לא תנאי התחלתי זה תנאי שפה.
אז אם נסתכל על המערכת $\varphi''(x) = \lambda\varphi(x)$ אז עבור $\lambda > 0$ הפתרונות הם צירוף לינארי של $e^{\pm\sqrt{\lambda}x}$ אבל זה כמובן לא ייתכן, $\lambda = 0$ זה פיתרון טריוויאלי ואם $\lambda < 0$ נסמן $\lambda = -m^2$ ונקבל

$$\varphi(x) = A_m\cos(mx) + B_m\sin(mx)$$

אבל $\varphi(0) = 0$ ולכן $A_m = 0$ אבל גם $\varphi(\pi) = 0$ אז $m \in \mathbb{Z}$ ולכן $\varphi_m(x) = B_m\sin(mx)$.

2.2 משוואות עם תנאי שפה

הגדרה 2.1 מערכת שטורם ליוביל

יהי $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ קטע ויהיו $p,q : [a,b] \to \mathbb{R}$ גזירות ברציפות.
המשוואה

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\right] + q(t)u(t) = 0$$

נקראת משוואת שטורם־ליוביל (S-L).
נאמר שהיא רגולרית אם $p(t) > 0$ לכל $t \in [a,b]$ ואנחנו נתבונן רק במשוואות רגולריות.
נוסיף למשוואה תנאי שפה – כלומר תנאים על u בנקודות a,b, למשל

1. תנאי דיריכלה – $u(a) = 0 = u(b)$
2. תנאי דיריכלה מוכלל – $u(a) = A, u(b) = B$
3. תנאי נוימן $u'(a) = 0 = u'(b)$
4. תנאי נוימן מוכלל $u'(a) = A, u'(b) = B$
5. מעורבב $u(a) = A, u'(b) = B$
6. מחזוריים $u(a) = u(b), u'(a) = u'(b)$

משוואת S-L עם תנאי שפה נקראת מערכת $S - L$.

סוף הרצאה 13 – 25/05

דוגמה

ראינו שלמשוואה $u''(t) + u(t) = 0$ על $[0,\pi]$ עם $u(0) = u(\pi) = 0$ יש אינסוף פתרונות (למעשה כל כפולה בסקלר של $\sin(t)$).
מצד שני, אותה משוואה עם התנאים $u(0) = 0, u(\pi) = 1$ אין בכלל פתרון.

משפט 2.2

עבור משוואות S-L רגולרית הבאים שקולים

1. לכל $A, B \in \mathbb{R}$ יש פתרון יחיד u שמקיים $u(a) = A, u(b) = B$
2. הפתרון היחידי עבורו תנאי השפה דיריכלה $u(a) = 0 = u(b)$ הוא פתרון ה־0

הוכחה: ברור ש־1 גורר את 2. בכיוון השני, יהיו $A, B \in \mathbb{R}$.
מרחב הפתרונות למשוואה הוא מרחב לינארי דו־מימדי (זו משוואה לינארית מסדר 2). נתבונן בהעתקה ששולחת פתרון u לערכים $\begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
זו העתקה לינארית ומההנחה שלנו הגרעין שלה הוא הגרעין הטריוויאלי – וקטור האפס ולכן זו העתקה חד־חד ערכית ועל וזה בידיוק מה שרצינו.
(הגרעין הוא טריוויאלי ולכן חד־חד ערכית וזו העתקה מ־$\mathbb{R}^2$ ל־$\mathbb{R}^2$ ולכן על). □

הערה

מעתה נתבונן במערכות S-L עם תנאי שפה דיריכלה.

1. יש עוד משוואות דיפרנציאליות חלקיות שפיתרון שלהן בעזרת הפרדת משתנים מוביל למערכת S-L ולא רק משוואת המיתר שלנו
2. הביטוי במערכת S-L עם תנאי שפה דיריכלה

$$\begin{aligned} (p(t)u'(t))' + q(t)u(t) \ (=0) \\ u(a) = 0 = u(b) \end{aligned}$$

מגדירה העתקה לינארית (למשל) ממרחב הפונקציות החלקות על $[a, b]$ עם תנאי השפה לעצמו.
לשם הדיון נניח ש־p, q חלקות ובהקשר הזה מאוד טבעי לשאול על וקטורים עצמיים, כלומר פונקציות u שמקיימות

$$(p(t)u'(t))' + q(t)u(t) = \lambda u(t)$$

משוואות המיתר הובילה אותנו למשוואה כזו! משוואת הערכים העצמיים שקולה בעצם למשוואה

$$(p(t)u'(t))' + (q(t) - \lambda)u(t) = 0$$

נתמקד בפיתרון בעיית הערכים העצמיים עבור מערכת S-L. למעשה, נתבונן בבעיה כללית יותר

$$(p(t)u'(t))' + (q(t) + \lambda\rho(t))u(t) = 0$$

יש המון מערכות עם התנהגות דומה (דיסקרטיות, רציפות ואחרות)

3. בהקשר הזה, מוטיבציה נוספת מגיעה מכך שההעתקה הלינארית המתוארת על־ידי משוואת S-L מתארת המילטוניאן קוונטי

$$\underbrace{(p(t)u'(t))'}_{\text{אנרגיה קינטית}} + \underbrace{q(t)u(t)}_{\text{אנרגיה פוטנציאלית}}$$

והערכים העצמיים הם הגדלים שניתן לקבל במדידת האנרגיה של המערכת

האסטרטגיה שלנו לחקר מערכת S-L: נעביר את הוקטור $\begin{pmatrix} u(t) \\ p(t)u'(t) \end{pmatrix}$ לקורדינאטות פולאריות, נכתוב עבורן משוואות ונגדיר

$$\begin{aligned} u(t) &= r(t)\sin(\theta(t)) \\ p(t)u'(t) &= r(t)\cos(\theta(t)) \end{aligned}$$

u מקיימת

$$(p(t)u'(t))' + q(t)u(t) = 0$$

מתקיים

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) - \frac{1}{p}(p(t)u'(t)) = 0$$

אז

$$r'(t)\sin(\theta(t)) + r(t)\cos(\theta(t))\theta'(t) - \frac{1}{p(t)}r(t)\cos(\theta(t)) = 0$$

ובנוסף, מהמשוואה

$$r'(t)\cos(\theta(t)) - r(t)\sin(\theta(t))\theta'(t) + q(t)r(t)\sin(\theta(t)) = 0$$

מכאן

$$r'(t) = \left(\frac{1}{p} - q(t)\right) r(t)\cos(\theta(t))\sin(\theta(t)))$$
$$\theta'(t) = q(t)\sin^2(\theta(t)) + \frac{1}{p(t)}\cos^2(\theta(t))$$

יונתן טוען שהראשונה לא חשובה והשנייה כן – היא לא לינארית אבל היא מסדר ראשון.

סוף הרצאה 14 – 26/05

נבחין שעבור $k \in \mathbb{Z}$ מתקיים

$$\theta(t) = \pi k \iff u(t) = 0$$

לכן אם נתרגם $u(0) = 0$ ל־$\theta(0) = 0$ נקבל ש־u פתרון למערכת המשוואות שלנו עם תנאי שפה דיריכלה אם ורק אם $\theta(b) = \pi k$ לאיזשהו $k \in \mathbb{Z}$.
נתמקד כרגע במשוואה הבאה עבור מערכת S-L

$$\theta'(t) = q(t)\sin^2(\theta(t)) + \frac{1}{p(t)}\cos^2(\theta(t))$$

טענה 2.3

נניח ש־$\theta, \tilde{\theta}$ שתי פונקציות המקיימות

$$\theta'(t) \geq q(t)\sin^2(\theta(t)) + \frac{1}{p(t)}\cos^2(\theta(t))$$
$$\tilde{\theta}'(t) \leq q(t)\sin^2\tilde{\theta}(t) + \frac{1}{p(t)}\cos^2\left(\tilde{\theta}(t)\right)$$

ונניח בנוסף ש־$\tilde{a} \geq \tilde{\theta}(a)$. אזי $\theta(t) \geq \tilde{\theta}(t)$ לכל $t \in [a, b]$.
יתרה מזאת, אם $\theta(b) = \tilde{\theta}(b)$ אז $\theta(t) = \tilde{\theta}(t)$ לכל $t \in [a, b]$.

הוכחה:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\theta(t) - \tilde{\theta}(t)\right) \geq q(t)\left(\sin^2(\theta(t)) - \sin^2\left(\tilde{\theta}(t)\right)\right) + \frac{1}{p(t)}\left(\cos^2(\theta(t)) - \cos^2\left(\tilde{\theta}(t)\right)\right)$$

ידוע שמתקיים

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y| \implies \left|\sin^2(x) - \sin^2(y)\right| = |(\sin(x) + \sin(y))(\sin(x) - \sin(y))| \leq 2|x - y|$$

וזה נכון גם עבור cos ולכן

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\theta(t) - \tilde{\theta}(t)\right) \geq q(t)\left(\sin^2(\theta(t)) - \sin^2\left(\tilde{\theta}(t)\right)\right) + \frac{1}{p(t)}\left(\cos^2(\theta(t)) - \cos^2\left(\tilde{\theta}(t)\right)\right) \geq -L\left|\theta - \tilde{\theta}\right|$$

עבור $L > 0$.
נניח בשלילה שיש $a < t_1 \leq b$ כך ש־$\theta(t_1) < \tilde{\theta}(t_1)$ ונסמן $t_0 = \sup\left\{t \in [a, t_1), \theta(t) \geq \tilde{\theta}(t)\right\}$ ואז $\theta(t_0) = \tilde{\theta}(t_0)$ ולכל $t \in [t_0, t_1]$ מתקיים $\theta(t) \leq \tilde{\theta}(t)$ או בקטע הפתוח $t \in (t_0, t_1]$ מתקיים $\theta(t) < \tilde{\theta}(t)$. לכן בקטע $[t_0, t_1]$ מתקיים

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \left(\theta(t) - \tilde{\theta}(t)\right) \geq L\left(\theta(t) + \tilde{\theta}(t)\right)$$

ולכן הפונקציה $e^{-Lt}\left(\theta(t) - \tilde{\theta}(t)\right)$ מונוטונית עולה בקטע $[t_0, t_1]$ ולכן

$$e^{-Lt_1}\left(\theta(t_1) - \tilde{\theta}(t_1)\right) \geq 0$$

בפרט $\theta(t_1) \geq \tilde{\theta}(t_1)$ בסתירה להנחה שלנו ולכן $\theta(t) \geq \tilde{\theta}(t)$. בפרט, לכל $t \in [a, b]$ מתקיים

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\theta(t) - \tilde{\theta}(t)\right) \geq -L\left(\theta(t) - \tilde{\theta}(t)\right)$$

כלומר הפונקציה $e^{Lt}\left(\theta(t) - \tilde{\theta}(t)\right)$ מונוטונית עולה ואי־שלילית בקטע ולכן אם $\theta(b) = \tilde{\theta}(b)$ אז $\theta(t) = \tilde{\theta}(t)$ לכל $t \in [a, b]$. □

מסקנה 2.4

נניח שהפונקציה θ (על הקטע $[a,b]$) מקיימת את אי־השיוויון

$$\theta'(t) \geq q(t)\sin^2(\theta(t)) + \frac{1}{p(t)}\cos^2(\theta(t))$$

ויהי $k \in \mathbb{Z}$ כך ש־$\theta(a) \geq \pi k$ אזי $\theta(b) > \pi k$.

הוכחה: נגדיר $\tilde{\theta} \equiv \pi k$ אזי

$$0 = \tilde{\theta}' < q(t)\underbrace{\sin^2\left(\tilde{\theta}(t)\right)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{p(t)}\cos^2\left(\tilde{\theta}(t)\right)}_{>0}$$

ומתקיים $\theta(a) \geq \tilde{\theta}(a)$ ולכן $\theta(b) \geq \tilde{\theta}(b)$ ולמעשה האי־שיוויון חזק כי אחרת היה שיוויון ואז θ הייתה קבועה והיינו מקבלים $\theta' \equiv 0$ ולכן $\theta(b) > \pi k$. □

מסקנה 2.5

יהי $p, \tilde{p}, q, \tilde{q}$ פונקציות גזירות ברציפות ב־$[a,b]$ כך ש־$0 < p(t) \leq \tilde{p}(t)$ ו־$q(t) \geq \tilde{q}(t)$ לכל $t \in [a,b]$.
יהיו $u, \tilde{u}$ פתרונות למשוואות שטורם־ליוביל המתאימות ו־$\theta, \tilde{\theta}$ הזוויות המתאימות (פונקציות הפאזה המתאימות/משתני פרופר המתאימים).
אם $\theta(a) \geq \tilde{\theta}(a)$ אז $\theta(t) \geq \tilde{\theta}(t)$ ואם $\theta(b) = \tilde{\theta}(t)$ אז $\theta(t) = \tilde{\theta}(t)$ לכל $t \in [a,b]$.

הוכחה:

$$\theta'(t) = q(t)\sin^2(\theta(t)) + \frac{1}{p(t)}\cos^2(\theta(t))$$
$$\tilde{\theta}'(t) = \tilde{q}(t)\sin^2\left(\tilde{\theta}(t)\right) + \frac{1}{\tilde{p}}(t)\cos^2\left(\tilde{\theta}(t)\right)$$

ולכן המשפט הוא מסקנה ישירה של הטענה (אם נחלק ונשתמש ב־$0 < p(t) \leq \tilde{p}(t), q(t) \geq \tilde{q}(t)$). □

מסקנה 2.6 **משפט ההשוואה של שטרום**

נניח ש־$0 < p(t) \leq \tilde{p}(t)$ ו־$q(t) \geq \tilde{q}(t)$ לכל t ויהיו $u, \tilde{u}$ פתרונות לא טריוויאליים למשוואות S-L המתאימות.
אם $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0$ אז קיים $\tau \in (a,b]$ כך ש־$u(\tau) = 0$.

הוכחה: נתבונן ב־$\theta, \tilde{\theta}$ פונקציות הפאזה המתאימות. על־ידי הכפלה ב־(-1) אם יש בך צורך ניתן לדאוג ש־$\theta(a) \in [0,\pi)$.
באותו אופן ניתן להניח ש־$\tilde{\theta}(a) = 0$ ולכן $\tilde{\theta}(b) > 0$ מהמסקנה לפני הקודמת.
אבל $\tilde{u}(b) = 0$ ולכן $\tilde{\theta}(b) = \pi k$ לאיזשהו $k \in \mathbb{Z}$ ולכן $\tilde{\theta}(b) \geq \pi$ ומהמסקנה הקודמת $\theta(a) \geq \tilde{\theta}(a)$ ומהמסקנה הקודמת $\theta(b) \geq \tilde{\theta}(b) \geq \pi$ וממשפט ערך הביניים יש $\tau \in (a,b]$ שעבורו $\theta(\tau) = \pi$ אבל אז $u(\tau) = 0$, כנדרש. □

2.3 ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות

יהיו $p, q, \rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציות גזירות ברציפות בקטע $[a,b]$ כך ש־$p, \rho > 0$ בקטע.

הגדרה 2.7

נאמר ש־$\lambda \in \mathbb{R}$ הוא ערך עצמי של המערכת S-L המתאימה לפונקציות p, q, ρ. אז יש פתרון שהוא לא זהותית אפס למערכת

$$(\star)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\right) + (q(t) - \lambda\rho(t))u(t) = 0$$

וכן $u(a) = u(b) = 0$ פתרון u למערכת הזו ייקרא פונקציה עצמית.

כידוע, לכל λ ישנו פתרון יחיד למשוואה

$$(p(t)u'(t))' + (q(t) + \lambda\rho(t))u(t) = 0$$

המקיים

$$u(a) = 0, \qquad u'(a) = 1$$

נסמן אותו ב־u_λ.

סוף הרצאה 15 – 01/06

טענה 2.8

λ הוא ערך עצמי של המערכת אם ורק אם $u_\lambda(b)=0$ ובמקרה הזה כל וקטור/פונקציה עצמית היא כפל של u_λ בסקלר.

הוכחה: אם $u_\lambda(b)=0$ אז λ הוא ערך עצמי. מצד שני, אם λ הוא ערך עצמי אז קיימת פונקציה u כך ש־$u(a)=u(b)=0$ כאשר $u'(a)\neq 0$ המקיימת את $(\star)$ בהגדרה 2.7.
נתבונן ב־$\tilde{u}=u'(a)u_\lambda$.
נשים לב ש־$\tilde{u}(a)=0$ ו־$\tilde{u}'(a)=u'(a)$ ולכן מיחידות $u=\tilde{u}$ כי הם מסכימים על תנאי ההתחלה ובפרט

$$u'(a)u_\lambda(b)=\tilde{u}=u(b)=0$$

ולכן $u_\lambda(b)=0$. □

נגדיר r_λ,θ_λ להיות פונקציות האמפליטודה והפאזה של u_λ

$$\begin{pmatrix} p(t)u'_\lambda(t) \\ u_\lambda(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_\lambda(t)\cos(\theta_\lambda(t)) \\ r_\lambda(t)\sin(\theta_\lambda(t))\end{pmatrix}$$

נשים לב ש־$\theta_\lambda(a)=0$ כי הנגזרת של $u_\lambda(a)$ היא 1 ובפרט היא חיובית (אנחנו שומרים על מערכת המשוואות לעיל) ולכן ממה שר5אינו $\theta_\lambda(t)>0$ לכל $b\geq t>a$.

טענה 2.9

λ הוא ערך עצמי אם ורק אם $\theta_\lambda(b)=\pi n$ עבור $n\in\mathbb{N}$.

הוכחה: אנחנו יודעים ש־λ ערך עצמי אם ורק אם $u_\lambda(b)=0$ וזה קורה אם ורק אם $\theta_\lambda(b)=\pi n$ לאיזשהו $n\in\mathbb{Z}$ אבל $\theta_\lambda(b)>0$.
(הראינו שאם $\theta(a)=\pi n$ אז $\theta(b)>\pi n$) □

דוגמה

כשהסתכלנו על משוואת המיתר

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u(t)+\lambda u(t)=0\\ u(a)=0=u(b)\end{gathered}$$

מהי u_λ?

$$u_\lambda(t)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\left(\sqrt{\lambda}(t-a)\right) & \lambda>0\\ t-a & \lambda=0\\ \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}(t-a)\right) & \lambda<0\end{cases}$$

מתקיים ש־$u_\lambda(b)=0$ אפשרי רק עבור $\lambda>0$ (כי סינוס היפרבולי לא מתאפס)ואז זה קורה אם ורק אם $\sqrt{\lambda}(b-a)=\pi n$ עבור $n\in\mathbb{N}$.
כלומר הערכים העצמיים הם

$$\lambda_n=\frac{\pi^2n^2}{(b-a)^2}$$

והפונקציות העצמיות הן

$$u(t)=C\sin\left(\frac{\pi n(t-a)}{b-a}\right)$$

עבור C קבוע כלשהו.

טענה 2.10

אם $\theta_\lambda(b)=\pi n$ אז לפונקציה $u_\lambda(t)$ יש בידיוק $n-1$ אפסים בקטע הפתוח (a,b).

הוכחה: לכל $0\leq k\leq n$ נגדיר $\tau_k:=\inf\{t\in[a,b]\mid \theta_\lambda(t)\geq \pi k\}$.
נשים לב ש־$a=\tau_0$ ו־$\tau_n=b$ ומהגדרת האיפיומם זאת סדרה עולה

$$a=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_n=b$$

לכל $t<\tau_k$ מתקיים $\theta_\lambda(t)<\pi k$ ו־$\theta_\lambda(\tau_k)=\pi k$ ועבור $t>\tau_k$ מתקיים $\theta_\lambda(t)>\pi k$.
אבל $u_\lambda(t)=0$ אם ורק אם $\theta_\lambda(t)=\pi k$ לאיזשהו k וזה קורה אם ורק אם $t=\tau_k$. □

אנחנו רוצים להבין מתי ולאיזה λ מתקיים $\theta_\lambda(b)=\pi n$ ונראה כעת שלכל $n\in\mathbb{N}$ יש λ יחיד כזה.

משפט 2.11

הפונקציה $\lambda \mapsto \theta_\lambda(b)$ היא רציפה ומונוטונית עולה ממש ויתרה מזאת

$$\lim_{\lambda\to\infty} \theta_\lambda(b) = \infty$$
$$\lim_{\lambda\to-\infty} \theta_\lambda(b) = 0$$

סוף הרצאה 16 – 02/06

הוכחה: את רציפות הפונקציה $\lambda \mapsto \theta_\lambda(b)$ נראה בתרגיל.
יהיו $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ עם $\lambda > \mu$ מתקיים

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}u_\lambda(t)\right) + (q(t) + \lambda\rho(t))u_\lambda(t) = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}u_\mu(t)\right) + (q(t) + \mu\rho(t))u_\mu(t) = 0$$

מתקיים $q(t) + \lambda\rho(t) > q(t) + \mu\rho(t)$ ולכן $\theta_\lambda(b) \geq \theta_\mu(b)$ כי ראינו שמכפלה כזאת מובילה לזווית גדולה יותר.
אם יש שיוויון, כלומר $\theta_\lambda(b) = \theta_\mu(b)$ ולכן $\theta_\lambda(t) = \theta_\mu(t)$ לכל t, אבל נשים לב

$$\theta'_\lambda(t) = (q(t) + \lambda\rho(t))\sin^2(\theta_\lambda(t)) + \frac{1}{p(t)}\cos^2(\theta_\lambda(t))$$
$$\theta'_\mu = (q(t) + \mu\rho(t))\sin^2\big(\theta_\mu(t)\big) + \frac{1}{p(t)}\cos^2\big(\theta_\mu(t)\big)$$

אז בפרט גם $\theta'_\lambda = \theta'_\mu$ ולכן נובע ש־$\mu = \lambda$, בסתירה. ולכן $\lambda \to \theta_\lambda(b)$ היא מונוטונית עולה ממש.
נראה ש־$\lim_{\lambda\to\infty} \theta_\lambda(b) = \infty$.
יהי $n \in \mathbb{N}$, נגדיר

$$\hat{\mu}(t) = \sin\left(\pi n\frac{t-a}{b-a}\right)$$

נשים לב ש־$\hat{u}$ פותרת את המשוואה

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_{\max}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(t) + \frac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2}p_{\max}\hat{u}(t)\right) = 0$$

היכן ש־$p_{\max} = \max\{p(t) \mid t \in [a,b]\}$ ונשים לב שמתקיים

$$\hat{u}(a) = 0 = \hat{u}(b)$$

נגדיר

$$p_{\max}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(t) = \hat{r}(t)\cos\big(\hat{\theta}(t)\big)$$
$$\hat{u}(t) = \hat{r}(t)\sin\big(\hat{\theta}(t)\big)$$
$$\hat{\theta}(t) = 0$$

ניתן לבחור λ כך שיתקיים

$$\lambda\rho_{\min} \geq \frac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2}p_{\max} - q_{\min}$$

ולכן

$$q(t) + \lambda\rho(t) \geq q_{\min} + \lambda\rho_{\min} \geq \frac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2}p_{\max}$$

יתרה מזאת, $p(t) \leq p_{\max}$ ולכן $\theta_\lambda(b) \geq \hat{\theta}(b)$ אבל $\hat{\theta}(b) = \pi n$ ולכן מצאנו λ כך ש־$\theta_\lambda(b) \geq \pi n$ ומשרירותיות $n \in \mathbb{N}$ ולכן $\lim_{\lambda\to\infty} \theta_\lambda(b) = \infty$ (הגבול קיים ממונוטוניות).
נראה ש־$\lim_{\lambda\to-\infty} \theta_\lambda(b) = 0$.
יהי $0 < \varepsilon < \pi$ ונבחר $\lambda < 0$ כך שיתקיים

$$(q_{\max} + \lambda\rho_{\min})\sin^2(\varepsilon) + \frac{1}{p_{\min}}\cos^2(\varepsilon) < 0$$

היות ש־ρ פונקציה חיובית נוכל לבחור λ קטנה דיו שהביטוי לעיל יהיה שלילי (ובהתאם sin לא מתאפס שם), נראה ש־$\theta_\lambda(b) \le \varepsilon$. נניח שלא, כלומר $\theta_\lambda(b) > \varepsilon$ ונגדיר

$$\tau = \inf\{t \in [a,b] \mid \theta_\lambda(t) > \varepsilon\}$$

וקיימת סדרה $t_j \downarrow \tau$ כך ש־$\theta_\lambda(t_j) > \varepsilon$ ולכן $\theta'_\lambda(\tau) \ge 0$. מצד שני

$$\begin{aligned}
\theta'_\lambda(\tau) &= (q(\tau) + \lambda\rho(\tau))\sin^2(\theta_\lambda(\tau)) + \frac{1}{p(\tau)}\cos^2(\theta_\lambda(\tau)) \\
&= (q(t) + \lambda\rho(\tau))\sin^2(\varepsilon) + \frac{1}{p(\tau)}\cos^2(\varepsilon) \\
&\le (q_{\max} + \lambda\rho_{\min})\sin^2(\varepsilon) + \frac{1}{p_{\min}(\tau)} < 0
\end{aligned}$$

וזאת סתירה מההנחה שלנו לעיל ולכן $\theta_\lambda(b) < \varepsilon$ ומשרירותיות ε נקבל $\lim_{\lambda\to-\infty}\theta_\lambda(b) = 0$. □

מסקנה 2.12

קיימת סדרה עולה של מספרים ממשיים $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ כך שמתקיים

1. λ_n הוא הפיתרון היחידי של המשוואה $\theta_\lambda(b) = \pi n$
2. $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$
3. λ הוא ערך עצמי של המערכת S-L אם ורק אם $\lambda \le \lambda_n$ עבור $n \in \mathbb{N}$
4. לכל $n \in \mathbb{N}$ הפונקציה μ_{λ_n} היא פונקציה עצמית של המערכת S-L עם ערך עצמי λ_n. יתרה מזאת, לפונקציה μ_{λ_n} יש בידיוק $n-1$ אפסים בקטע (a,b)

הוכחה: לכל $n \in \mathbb{N}$ יש λ_n כך ש־$\theta_{\lambda_n} = \pi n$ זאת משום הפונקציה $\theta \mapsto \theta_\lambda(b)$ היא רציפה ומתקיים

$$\lim_{\lambda\to\infty}\theta_\lambda(b) = \infty, \lim_{\lambda\to-\infty}\theta_\lambda(b) = 0$$

אז ממשפט ערך הביניים λ_n יחיד כי הפונקציה מונוטונית ממש וזה מוכיח את 1.
נשים לב ש־$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\theta_{\lambda_n}(b)}_{=\pi n} = \infty$ אבל הפונקציה $\lambda \mapsto \theta_\lambda(b)$ היא פונקציה רציפה וזה גורר ש־$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$ וזה סוגר את 2.
הראנו ש־λ ערך עצמי אם ורק אם $\theta_\lambda(b) = \pi n$ אם ורק אם $\lambda = \lambda_n$ וזה סוגר את 3 ואת 4 הראינו כבר. □

מסקנה 2.13

לכל מערכת S-L רגולריות $(\rho, p > 0)$ עם תנאי שפה דיריכלה יש אינסוף ערכים עצמיים.

סוף הרצאה 17 – 08/06

3 משוואות דיפרנציאליות חלקיות

3.1 משוואת לפלס

הגדרה 3.1 משוואת לפלס

עבור $u \in C^2(\Omega)$ עבור $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה נגדיר את משוואת לפלס להיות המשוואה

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0$$

ול־Δu אנחנו קוראים הלפלסיאן ול־u אנחנו קוראים פונקציה הרמונית.

הערה

1. באופן שקול, $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla)$ (הדיברגנס הופך שדה לסקלר והסקלר אומר מה הקצב של ההתרחבות של השדה) וזה בעצם אנלוג טבעי לנגזרת השנייה במימד אחד.
2. אם $u \in C^2(\Omega)$, H ההסיאן כאשר $H_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ מטריצת הנגזרות החלקיות. אז $\Delta u = \operatorname{tr} H(u)$.
היות שהעקבה לא משתנה תחת שינוי בסיס, Δu אינווריאנטי לסיבובים ולהזזות.

דוגמה

1. אם $n = 1$ ו־u הרמונית אז $u(x) = ax + b$
2. אם $n = 2$ טבעי להסתכל על המרוכבים אז $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ הולומורפית כלומר גזירה לפי z אז $f(z) = u + iv$ עבור $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הרמוניות כאשר $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.
כאשר $u(x,y) = Re(f(x+iy)), v(x,y) = Im(f(x+iy))$. למה? כי פונקציה הולומורפית מקיימת את משוואות קושי רימן

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

סימון $\fint$

תהיי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהיי $u \in C^2(\Omega)$ ויהי $\overline{B(x_0, r_0)} \subseteq \Omega$ (כדור שהסגור שלו ב־Ω).

$$\fint_{B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}V := \frac{1}{\operatorname{Vol}(B(x_0,r_0))} \int_{B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}V$$

$$\fint_{\partial B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}S = \frac{1}{\operatorname{Area}(\partial B(x_0,r_0))} \int_{\partial B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}S$$

משפט 3.2 תכונת הערך הממוצע של פונקציות הרמוניות

תהיי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהיי $u \in C^2(\Omega)$ אזי u הרמונית ב־Ω אם ורק אם לכל $\overline{B(x_0, r_0)} \subseteq \Omega$ (כדור שהסגור שלו ב־Ω) מתקיים

$$\fint_{B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}V = u(x_0) = \fint_{\partial B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}S$$

הוכחה: $\Longleftarrow$ נניח ראשית ש־u הרמונית ויהי $\overline{B(x_0, r_0)} \subseteq \Omega$ נראה ש־$\fint_{\partial B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}S = u(x_0)$.
לכל $0 < r \leq r_0$ נגדיר

$$\varphi(r) = \fint_{\partial B(x_0,r)} u \,\mathrm{d}S$$

מרציפות u מתקיים $\lim_{r\to 0} \varphi(r) = u(x_0)$ ($\heartsuit$) ולכן מספיק שנראה ש־$\varphi'(r) = 0$ ואז נקבל ש־u קבועה.
נגדיר $\psi_r : \overline{B(0,1)} \to \overline{B(x_0,r)}$ על־ידי $\psi_r(y) = x_0 + ry$ אז ψ_r הוא דיפאומורפיזם בין השפות עם יעקוביאן r^{n-1}.

$$\fint_{\partial B(0,1)} (u \circ \psi_r) \,\mathrm{d}S = \frac{1}{\operatorname{Area}(\partial B(0,1)) \cdot r^{n-1}} \int_{\partial B(0,1)} (u \circ \psi_r) r^{n-1} \,\mathrm{d}S = \frac{1}{\operatorname{Area}(\partial B(x_0,r))} \int_{\partial B(x_0,r)} u \,\mathrm{d}S = \varphi(r)$$

תרגיל 3.3

$$\operatorname{Area}(\partial B(0,1)) \cdot r^{n-1} = \operatorname{Area}(\partial B(x_0,r))$$

ולכן עם גזירה מתחת לסימן האינטגרל

$$\begin{aligned}
\varphi'(r) &= \fint_{\partial B(0,1)} \frac{\partial}{\partial r}(u \circ \psi_r)\,\mathrm{d}S \\
&= \fint_{\partial B(0,1)} \langle \nabla u, \hat{n} \rangle\,\mathrm{d}S \\
&\underset{(\star)}{=} \frac{1}{\mathrm{Area}(\partial B(0,1))} \int_{B(0,1)} \mathrm{div}(\nabla u)\,\mathrm{d}V \\
&\underset{(\star\star)}{=} \frac{1}{\mathrm{Area}(\partial B(0,1))} \int_{B(0,1)} \Delta u\,\mathrm{d}V \\
&\underset{(\star\star\star)}{=} 0
\end{aligned}$$

כאשר $(\star)$ זה משפט הדיברגנץ, $(\star\star)$ זו הגדרת הלפלסיאן ו־$(\star\star\star)$ זה מהיות u הרמונית ולכן φ פונקציה קבועה ומהרציפות נסיק קבועה $u(x_0)$.
נשאר להראות ש־u מקיימת את תכונת ערך הממוצע על כדורים

$$\begin{aligned}
\fint_{B(x_0,r_0)} u\,\mathrm{d}v &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(B(x_0,r_0))} \int_0^{r_0} \mathrm{d}r \int_{\partial B(x_0,r)} u\,\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}(B(x_0,r_0))} \int_0^{r_0} \mathrm{d}r \frac{\mathrm{Area}(\partial B(x_0,r))}{\mathrm{Area}(\partial B(x_0,r))} \int_{\partial B(x_0,r)} u\,\mathrm{d}S \\
&= \frac{u(x_0)}{\mathrm{Vol}(B(x_0,r_0))} \int_0^{r_0} \mathrm{Area}(\partial B(x_0,r))\,\mathrm{d}r \\
&= u(x_0)
\end{aligned}$$

אז הראינו שאם u הרמונית אזי $\fint_{\partial B(x_0,r_0)} u\,\mathrm{d}S = u(x_0)$ והראינו ש־$\fint_{B(x_0,r_0)} u\,\mathrm{d}v = u(x_0)$.
$\Longrightarrow$ בכיוון השני, נניח ש־u לא הרמונית ולכן יש כדור קטן שעליו $\Delta u > 0$ (בלי הגבלת הכלליות, יכול להיות גם קטן מאפס) אבל אז מההנחה ש־$\fint_{\partial B(x_0,r_0)} u\,\mathrm{d}S = u(x_0)$ נקבל ש־$\varphi'(r) = 0$ אבל זאת סתירה.

הערה

הסבר ל־$(\heartsuit)$: שכן לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שאם $y \in B(x_0,\delta)$ אז $|u(y) - u(x_0)| < \varepsilon$ ואז עבור $0 < r < \delta$ מתקיים

$$|u(x_0) - \varphi(r)| = \left| \fint_{\partial B(x_0,r)} u(s)\,\mathrm{d}S - u(x_0) \right| \underset{\triangle}{\leq} \fint_{\partial B(x_0,r)} |u(s) - u(x_0)|\,\mathrm{d}S < \varepsilon \fint_{\partial B(x_0,r)} \mathrm{d}S = \varepsilon$$

□

הערה

במהלך ההוכחה בעצם גם הראינו שעבור פונקציות C^2 תכונת ערך הממוצע על כדורים שקולה לתכונת הערך הממוצע על ספירות (אנחנו עשינו רדוקציה מספירות לכדורים בעזרת אינטגרל, באותה מידה אפשר לעשות רדוקציה מכדורים לספירות בעזרת נגזרת).

סוף הרצאה 18 – 09/06

משפט 3.4 **עיקרון המקסימום לפונקציות הרמוניות**

נניח ש־$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה וחסומה ונניח ש־$u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ הרמונית.
1. העיקרון החלש – המקסימום מתקבל על השפה, כלומר $\max u\left(\overline{\Omega}\right) = \max u(\partial\Omega)$
2. העיקרון החזק – אם Ω קשירה וקיים $x_0 \in \Omega$ כך ש־$u(x_0) = \max u\left(\overline{\Omega}\right)$ אז u קבועה

הוכחה:
1. יהי $x_0 \in \overline{\Omega}$ כך ש־$u(x_0) = \max u\left(\overline{\Omega}\right)$. אם $x_0 \in \partial\Omega$ אז סיימנו. אחרת, יש $r > 0$ כך ש־$B(x_0,r) \subseteq \Omega$ ומתקיים $u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u\,\mathrm{d}V$.
אבל זה אומר שלכל $y \in B(x_0,r)$ מתקיים $u(y) = u(x_0)$ שכן אם לא מתקיים $u(y) < u(x_0)$ (כי $u(x_0)$ מקסימום) ולכן מרציפות יש קבוצה פתוחה המוכלת ב־$B(x_0,r)$ שעליה $u < u(x_0)$ ואז $\fint_{B(x_0,r)} u\,\mathrm{d}V < u(x_0)$.
זה נכון לכל $r \leq \mathrm{dist}(x_0,\partial\Omega)$ ולכן לכל $y \in \partial\Omega \cap \partial B(x_0,\mathrm{dist}(x_0,\partial\Omega))$ מתקיים $u(y) = u(x_0) = \max u\left(\overline{\Omega}\right)$.
2. נניח ש־$x_0 \in \Omega$ מקיימת $u(x_0) = \max u(\Omega)$ ונתבונן בקבוצה $A := \{y \in \Omega \mid u(x_0) = u(y)\}$.
A סגורה ב־Ω מרציפות והיא לא ריקה כי $x_0 \in A$. אבל הראינו ש־A פתוחה ב־Ω (זה נובע ישירות מתכונת ערך הממוצע של פונקציות הרמוניות שכן הדרך היחידה שבה הממוצע של פונקציה (שחסומה על ידי M) יכול לצאת שווה בדיוק ל־M היא אם הפונקציה שווה ל־M בכל נקודה בתוך הממוצע הזה) אבל Ω קשירה ולכן $A = \Omega$.

□

הערה

אם u הרמונית אז $-u$ הרמונית גם כן ולכן המשפט לגבי עיקרון המקסימום נכון גם למינימום.

מסקנה 3.5

אם $u, v \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{U}\right)$ כאשר Ω פתוחה וחסומה ומתקיים ש־$u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega}$ ו־$\Delta u = \Delta v$. אז $u = v$.

הוכחה: $u - v$ פונקציה הרמונית ב־Ω ומקיימת $\min(u - v) = \max(u - v) = 0$ ולכן זו פונקציית האפס ו־$u = v$. □

נקבע פונקציה חלקה ואי־שלילית $\eta : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ המקיימת $\eta|_{[0,\frac{1}{2})} = 1$ ועבור $x \geq 1$ ניקח $\eta(x) = 0$.
בהינתן $\varepsilon > 0$ נגדיר $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ על־ידי

$$\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{\eta\left(\frac{\|x\|}{\varepsilon}\right)}{\int_{\mathbb{R}^n} \eta(\|y\|)\,\mathrm{d}y}$$

φ_ε חלקה, רדיאלית הנתמכת על $B(0, \varepsilon)$ ומקיימת $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y = 1$.

הגדרה 3.6 שיכוך

יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ולכל $\varepsilon > 0$ נסמן $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.
עבור $u \in C(\Omega)$ ו־$\varepsilon > 0$ נגדיר את השיכוך של u בסקאלה ε להיות הפונקציה $u^\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ שנתונה על־ידי

$$u^\varepsilon = \varphi_\varepsilon * u = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x - y) u(y)\,\mathrm{d}y$$

בפרט u^ε חלקה (הוכחנו בתרגיל 10).

משפט 3.7

תהיי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ונניח ש־$u \in C(\Omega)$ מקיימת את תכונת הערך הממוצע ב־Ω. אזי $u \in C^\infty(\Omega)$ (חלקה) ובפרט הרמונית.

הוכחה: מספיק להראות שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $u|_{\Omega_\varepsilon} = u^\varepsilon$. אז עבור $x \in \Omega_\varepsilon$ מתקיים

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(x) &= \int_{B(x,\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(x - y) u(y)\,\mathrm{d}V(y) \\
&= \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(x,r)} \varphi_\varepsilon(x - y) u(y)\,\mathrm{d}S(y)\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} \eta(\|z\|)\,\mathrm{d}z} \int_0^\varepsilon \frac{\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^n} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}S(y)\,\mathrm{d}r \\
&\underset{(\star)}{=} \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} \eta(\|z\|)\,\mathrm{d}z} \int_0^\varepsilon \frac{\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^n} \int_{\partial B(x,r)} u(x)\,\mathrm{d}S(y)\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{u(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \eta(\|z\|)\,\mathrm{d}z} \int_0^\varepsilon \frac{\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^n} \int_{\partial B(x,r)} \mathrm{d}S(y)\,\mathrm{d}r \\
&= u(x) \int_{B(x,\varepsilon)} \varphi^\varepsilon(x - y)\,\mathrm{d}V(y) \\
&= u(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \\
&\underset{(\star\star)}{=} u(x)
\end{aligned}$$

כאשר $(\star)$ זה מתכונת ערך הממוצע ו־$(\star\star)$ זה מכיוון ש־$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y = 1$ מהגדרה. □

מסקנה 3.8

פונקציות הרמוניות הן חלקות.

מסקנה 3.9

גבול במידה שווה של פונקציות הרמוניות הוא הרמוני (ב־$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה).

הוכחה: אם $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות הרמוניות ו־$f_n \rightrightarrows f$ (במידה שווה). אז f_n רציפות ולכן f רציפה. בנוסף, לכל $x \in \Omega$ מתקיים

$$\fint_{B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}V(y) = \lim_{n\to\infty} \fint_{B(x,r)} f_n(y)\,\mathrm{d}V(y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

□

משפט 3.10 **הערכת נגזרות לפונקציות הרמוניות**

לכל $n,k \in \mathbb{N}$ יש קבוע $0 < C(n,k)$ כך שלכל קבוצה פתוחה $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ולכל $u : \Omega \to \mathbb{R}$ הרמונית ולכל מולטי־אינדקס $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ (אינדקס וקטורי) עם $|\alpha| = \sum \alpha_i = k$ ולכל $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$ מתקיים

$$|D^\alpha u(x)| = \left| \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} u(x) \right| \le \int_{B(x,r)} |D^\alpha \varphi_r(x-y)||u(y)|\,\mathrm{d}y \le \frac{C(n,k)}{r^{n+k}} \int_{B(x,r)} |u(y)|\,\mathrm{d}y$$

הוכחה: מתקיים $u|_{\Omega_r} = u^r$ ולכן $D^\alpha u(x) = D^\alpha \varphi_r * u$ כאשר

$$\varphi_r(x-y) = \frac{1}{r^n \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\|z\|)\,\mathrm{d}z} \eta\left(\frac{\|x-y\|}{r}\right)$$

על־כל גזירה יוצאת חזקה של r החוצה ואת שאר הגורמים ניתן לחסום יוניפורמית מכך ש־η נתמכת קומפקטית וחלקה ואז (וגם את הנגזרות שלה מסדר גדול שווה ל־k וגם לחסום צירופים לינאריים ומכפלות שלהם) ולכן יש $C(n,k)$ גדול מספיק החוסם כנדרש. □

סוף הרצאה 19 – 15/06

משפט 3.11 **אי־שיוויון הרנאק**

יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ותהיי $V \subseteq \Omega$ פתוחה, קשירה וחסומה כך ש־$\overline{V} \subseteq \Omega$. אזי יש קבוע $0 < C(\Omega, V)$ כך שלכל $u : \Omega \to \mathbb{R}$ הרמונית ואי־שלילית מתקיים

$$\sup u(V) \le C(\Omega, V) \cdot \inf u(V)$$

הוכחה: נוכיח קודם מקרה פרטי. נניח ש־$V = B(x,r)$ ונניח גם ש־$\overline{B(x_0,4r)} \subseteq \Omega$ ונקבע $x_0, x_1 \in V$.
מאי־שיוויון המשולש $B(x_1,r) \subseteq B(x_0,3r)$ ו־$\overline{B(x_0,3r)} \subseteq \Omega$ ולכן מערך הממוצע ומאי־שליליות של u

$$\begin{aligned}
u(x_0) &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(B(x_0,3r))} \int_{B(x_0,3r)} u(y)\,\mathrm{d}y \\
&\ge \frac{1}{\mathrm{Vol}(B(x_0,3r))} \int_{B(x_1,r)} u(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\mathrm{Vol}(B(x_1,r))}{\mathrm{Vol}(B(x_0,3r))} u(x_1) \\
&= 3^{-n} u(x_1)
\end{aligned}$$

כלומר עבור המקרי הפרטי אפשר לקחת את הקבוע להיות 3^n.
למקרה הכללי, מקומפקטיות יש אוסף סופי של נקודות $p_1, ..., p_M \in \overline{V}$ ורדיוסים $r_1, ..., r_M > 0$ כך ש־$\overline{V} \subseteq \bigcup_{i=1}^M B(p_i, r_i) \subseteq \Omega$ ו־$\overline{B(p_i, 4r_i)}$ לכל i.
נקבע $x_0, x_1 \in V$ ומכך ש־V תת־קבוצה פתוחה וקשירה של $\mathbb{R}^n$ אז היא קשירה מסילתית. לכן נקבע איזושהי מסילה ב־V שמקשרת בין x_0 ו־x_1 והמסילה מכוסה על־ידי לכל היותר M מהכדורים. בלי הגבלת הכלליות אפשר להניח שאפשר להתקדם מ־x_0 ל־x_1 על־גבי המסילה כאשר בכל צעד אנחנו עוברים מכדור נתון לכדור שעדיין לא ביקרנו בו ובכל מעבר כזה אנחנו צוברים פקטור של לכל היותר 3^{-n} בהפרש בין ערכי u על נקודות הקצה של המעבר ולכן $C(\Omega, V) = 3^{nM}$ הקבוע הנדרש. □

3.2 בעיית דיריכלה

נתונה קבוצה פתוחה וחסומה $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ יפה מספיק ונתונות פונקציות $g \in C(\partial\Omega)$ ו־$f \in C(\Omega)$. איך למצוא $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ כך ש־$u|_{\partial\Omega} = g$ ו־$\Delta u|_\Omega = f$.
זו בעיית דיריכלה למשוואת פואסון והמקרה הפרטי $f = 0$ נקרא בעיית דיריכלה למשוואת לפלס/לפונקציות הרמוניות.
איך פותרים בעיה כזאת? האסטרטגיה שלנו היא שאם נניח שיש לנו פונקציה $K : \Omega \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$ המקיימת שלכל y, $\Delta_x K(x,y) = 0$ ונניח בנוסף שמתקיים

$$\lim_{x\to y_0} \int_{\partial\Omega} K(x,y) g(y)\,\mathrm{d}s(y) = g(y_0)$$

אז אם K מספיק "יפה" כדי שיהיה אפשר להצדיק גזירה מתחת לסמן האינטגרל, אז עבור

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} K(x,y) g(y)\,\mathrm{d}s(y) \implies \Delta u(x) = \int_{\partial\Omega} \Delta_x K(x,y) g(y)\,\mathrm{d}s(y) = 0$$

אז נקבל פונקציה הרמונית ובנוסף $\lim_{x\to y_0 \in \partial\Omega} u(x) = g(y_0)$.

דוגמה

נזהה $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. נתבונן בפונקציה $K(z,w) = Re\left(\frac{z+w}{w-z}\right)$ כאשר $z \in \mathbb{D}$, $w \in \partial\mathbb{D}$ ו־$\Omega = \mathbb{D}$. K הרמונית כי החלק הממשי של פונקציה הולומורפית.

$$K(z,w) \underset{\substack{w=e^{it} \\ z=re^{i\theta}}}{=} Re\left(\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}\right) = Re\left(\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\right)$$

אנחנו רוצים להבין את ההתנהגות של $K(z,w)$ כאשר $z \to w_0 = e^{it_0} \in \partial\mathbb{D}$. נסמן $\theta' = \theta - t$ ואנחנו רוצים להתבונן באינטגרל

$$\int_{\partial\mathbb{D}} K(z,w)g(w)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K\left(re^{i\theta}, e^{it}\right)g(e^{it})\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\substack{r\to 1 \\ \theta\to t_0}]{} ?$$

נניח ש־$\theta = t_0$ אזי

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(re^{it_0}, e^{it})g(e^{it})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{1+re^{i(t_0-t)}}{1-re^{i(t_0-t)}}\right)g(t)\,\mathrm{d}t$$

נשים לב שאם נסמן $t' = t_0 - t$ נקבל

$$Re\left(\frac{1+re^{it'}}{1-re^{it'}}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t')+r^2}$$

וזה בעצם גרעין פואסון! כאשר $t' = 0$ זה בעצם $\frac{1-r^2}{1-2r+r^2} = \frac{(1-r)(1+r)}{(1-r)^2} = \frac{1+r}{1-r}$ וכאשר $r \to 1$ זה מתפוצץ.

סוף הרצאה 20 – 16/06

3.3 שיטת Perron לפתרון בעיית דיריכלה

המטרה שלנו היא לפתור את בעיית דיריכלה עבור משוואת לפלס $\Delta u|_\Omega = 0$ כאשר $u|_{\partial\Omega} = g$.

הגדרה 3.12 פונקציה תת־הרמונית

תהיי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום (קבוצה פתוחה וקשירה). $v \in C(\Omega)$ תקרא תת־הרמונית ב־Ω אם לכל $B \subseteq \Omega$ כדור פתוח כך ש־$\overline{B} \subseteq \Omega$ ולכל $h \in C\left(\overline{B}\right)$ הרמונית ב־B המקיימת $v|_{\partial B} \le h|_{\partial B}$ מתקיים $v \le h$ ב־B.

טענה 3.13 הגדרה שקולה לפונקציה תת־הרמונית במימד אחד

במימד אחד פונקציה v היא תת־הרמונית אם ורק אם v קמורה.

הערה

כל פונקציה הרמונית היא תת־הרמונית.

משפט 3.14 עיקרון המקסימום החזק עם פונקציות תת־הרמוניות

יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהיי $u \in C(\Omega)$ תת־הרמונית ב־Ω. אם u מקבלת מקסימום ב־Ω אז u קבועה ב־Ω.

הוכחה: נסמן

$$M := \max_{x\in\Omega} u(x), \quad A := \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$$

מאחר ש־u רציפה נובע ש־A סגורה ב־Ω ולא ריקה ויהיו $x_0 \in A$, $B = B(x_0, r)$ כדור כך ש־$\overline{B} \subseteq \Omega$.
תהיי h הרמונית ב־B ורציפה ב־$\overline{B}$ המקיימת $h|_{\partial B} = u|_{\partial B}$.
מאחר ש־$u \le M$ בכל Ω, בפרט נקבל ש־$h|_{\partial B} = u|_{\partial B} \le M$ אבל h הרמונית ולכן מעיקרון המקסימום נובע כי $h|_B \le M$.
מצד שני, u תת־הרמונית ולכן $u|_B \le h|_B$ ובפרט בנקודה x_0 מתקיים $M = u(x_0) \le h(x_0)$.
קיבלנו ש־$h \le M$ בכל הכדור, אך $h(x_0) \ge M$, ולכן בהכרח $h(x_0) = M$. כלומר הפונקציה ההרמונית h מקבלת מקסימום בנקודה פנימית, ולכן מעיקרון המקסימום החזק לפונקציות הרמוניות נובע ש־$h \equiv M$ בכל $\overline{B}$.
מכאן שעל שפת הכדור, $u|_{\partial B} = h|_{\partial B} = M$ וזה נכון לכל r ולכן $B \subseteq A$ כלומר A פתוחה.
A פתוחה, סגורה ולא ריקה ולכן מקשירות Ω נקבל $A = \Omega$. □

משפט 3.15 עקרון המקסימום החלש לפונקציות תת־הרמוניות

יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום חסום ותהיינה $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ תת־הרמונית, $h \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ הרמונית ב־Ω. אם $u \le h$ על $\partial\Omega$ אז $u \le h$ ב־Ω.

הערה

למשל, אם $u \le M$ על $\partial\Omega$ אזי $u \le M$ ב־Ω (זה בעצם ניסוח שקול).

הוכחה: נביט ב־$w = u - h$ והיא תת־הרמונית (מהגדרה ואריתמטיקה של פונקציות תת־הרמוניות).
תהיי $x_0 \in \overline{\Omega}$ כך ש־$w(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} w$. נתון ש־$w \le 0$ על $\partial\Omega$ ונחלק למקרים
1. אם $x_0 \in \Omega$ אז w קבועה על $\overline{\Omega}$ מעיקרון המקסימום החזק ולכן $w \le 0$ על $\partial\Omega$ גורר ש־$w \le 0$ ב־Ω
2. אם $x_0 \in \partial\Omega$ אז לכל $x \in \overline{\Omega}$ מתקיים $w(x) \le w(x_0) \le 0$ כאשר האי־שיוויון הראשון זה כי x_0 נקודת מקסימום והשני זה ש־$x_0 \in \partial\Omega$

בכל מקרה $w \le 0$ ב־Ω כלומר $u \le h$ ב־Ω. □

טענה 3.16

אם $u_1, u_2, ..., u_N$ תת־הרמוניות ב־Ω אז $u = \max\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ היא תת־הרמונית ב־Ω.

הוכחה: יהי $\overline{B} \subseteq \Omega$ ו־$h \in C\left(\overline{B}\right)$ הרמונית ב־B כך ש־$u|_{\partial B} \le h|_{\partial B}$.
אז מתקיים לכל $1 \le j \le n$ גם ש־$u_j\ |_{\partial B} \le h|_{\partial B}$ אבל u_j תת־הרמונית ולכן $u_j \le h$ ב־B וזה נכון לכל j ולכן גם $u \le h$. □

הרעיון של שיטת Perron זה לחפש פונקציות תת־הרמוניות v שמקיימות $v|_{\partial\Omega} \le g$ ופותרת את מערכת המשוואה הבאה ב־Ω

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

הגדרה 3.17 u^{per}

$$u^{per}(x) = \sup\left\{v(x) \mid v|_{\partial\Omega} \le g, v \in C\left(\overline{\Omega}\right) \text{ sub-harmonic}\right\}$$

הגדרה 3.18 ההרמה ההרמונית

תהיי v תת־הרמונית ב־Ω ו־$\overline{B} \subseteq \Omega$. נגדיר את ההרמה ההרמונית של v לכדור B ב־V כך ש־$V \in C(\Omega)$ המוגדרת על־ידי

$$V(x) = \begin{cases} v(x) & x \notin B \\ \overline{v}(x) & x \in B \end{cases}$$

כאשר $\overline{v} \in C\left(\overline{B}\right)$, $\overline{v}|_{\partial B} = v|_{\partial B}$ ו־$\overline{v}$ הרמונית ב־B.

הערה

בהרצאה דן (שהחליף את יונתן) סימן את ההרמה הרמונית בתור $\overline{v}^B$ ול־$\overline{v}$ הוא קרא h אבל מצאתי את זה מבלבל בהוכחה של משפט פרון אז נצמדתי לסימונים מהמודל.

הערה

ההרמה ההרמונית מצדיקה את השם שלה בגלל שמתקיים $v \le V$ ב־Ω שכן אם $\overline{v}$ הרמונית ב־B אז מכך ש־$v = \overline{v}$ על ∂B ובפרט $v \le \overline{v}$ על ∂B הרי ש־$v \le \overline{v}$ ב־B מעצם הגדרת v כפונקציה תת־הרמונית ולכן בסך־הכל $v \le V$ ב־Ω.

טענה 3.19

V היא תת־הרמונית ב־Ω.

הוכחה: יהי $C \subseteq \Omega$ כדור כך ש־$\overline{C} \subseteq \Omega$, ותהי $h \in C\left(\overline{C}\right)$ הרמונית ב־C כך ש־$V|_{\partial C} \le h|_{\partial C}$. נרצה להראות ש־$V \le h$ ב־C.
v תת־הרמונית ב־Ω ולכן $v \le V$ בכל Ω. מההנחה שלנו, מתקיים $V \le h$ על ∂C, ומכאן שגם $v \le h$ על ∂C. h הרמונית ו־v תת־הרמונית ולכן מעקרון המקסימום עבור פונקציות תת־הרמוניות נקבל ש־$v \le h$ בכל C. לפי הגדרת ההרמה, ב־$C \setminus B$ מתקיים $V = v$, כלומר קיבלנו ש־$V \le h$ ב־$C \setminus B$. נסמן $U := B \cap C$ ונבחן את

$$\partial U = \underbrace{\left(\partial B \cap \overline{C}\right)}_{I} \cup \underbrace{\left(\overline{B} \cap \partial C\right)}_{II}$$

על II מתקיים $V \le h$ מהנתון ועל I, לפי הגדרת ההרמה מתקיים $V = v$ והראינו ש־$v \le h$ בכל C, נובע כי $V = v \le h$ גם על I ולכן $V \le h$ על כל ∂U.
ב־$U \subseteq B$ מתקיים $V = \overline{v}$ שהיא הרמונית ב־B ולכן $V - h$ הרמוני ב־U המקיים $V - h \le 0$ על ∂U ומעיקרון המקסימום אי־השיוויון נשמר גם ב־U. □

משפט 3.20

תהיי u_n סדרה חסומה של פונקציות הרמוניות ב־Ω. אזי קיימת תת־סדרה u_{n_k} המתכנסת לפונקציה הרמונית ב־Ω (ההתכנסות היא במידה שווה על כל תת־קבוצה קומפקטית של Ω).

הוכחה: נביט ב־$\partial_i u$ (כלומר $\frac{\partial u}{\partial x_i}$) והיא גם פונקציה הרמונית ולכן לכל $x_0 \in \Omega$ מתקיים

$$\begin{aligned}
\partial_i u(x_0) &= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} (\partial_i u)(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} (\partial_i u)(x)\cdot 1\,\mathrm{d}x \\
&= -\cancel{\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} u\cdot(\partial_i 1)\,\mathrm{d}x} + \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{\partial B(x_0,r)} u\cdot 1\cdot n_i\,\mathrm{d}\,\mathrm{Vol}_{n-1} \\
&\le \frac{|\partial B(x_0,r)|\cdot \max|u|}{|B(x_0,r)|} \\
&\le \frac{C_n r^{n-1}}{C_n' r^n}\cdot \max_{\overline{\Omega}}|u| \\
&= \frac{\max_{\overline{\Omega}}|u|}{r}
\end{aligned}$$

כאשר r קטן דיו עבור $r < \mathrm{dist}(K,\partial\Omega)$ עבור $K \subseteq \Omega$ קומפקטית ולכן לכל $x \in K$ מתקיים

$$|u_n(x) - u_n(y)| \le \max_K |\nabla u_n|\cdot|x-y| \le \frac{\max_{\overline{\Omega}}|u|}{r}|x-y|$$

אז u_n רציפה במידה שווה ואפילו ליפשיצית והיא לא תלויה ב־n ולכן רציפה במידה אחידה וממשפט ארצלה־אסקולי נקבל שקיימת תת־סדרה u_{n_k} שמתכנסת במידה שווה על K והגבול הזה הרמוני כי הוא גבול במידה שווה.

כדי להרחיב זאת לכל Ω, נבחר סדרה עולה של קבוצות קומפקטיות $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ כך ש־$\bigcup_m K_m = \Omega$. ממשפט ארצלה־אסקולי קיימת תת־סדרה שמתכנסת במידה שווה על K_1. מתוכה נוציא תת־סדרה שמתכנסת במידה שווה על K_2, וכן הלאה. נפעיל את טיעון האלכסון של קנטור ונקבל שתת־הסדרה u_{n_k} מתכנסת במידה שווה על כל קבוצה קומפקטית ב־Ω. □

סוף הרצאה 21 – 23/06

הערה

לא דיברנו על זה (אבל כן ראינו ביריעות) ש־$v \in C^2(\Omega)$ תת־הרמונית אם ורק אם $\Delta v \ge 0$ ולכן יש הרבה מאוד פונקציות תת־הרמוניות וקל לייצר כאלו.

משפט 3.21 **משפט Perron**

נגדיר

$$S_g := \Big\{v \in C\Big(\overline{\Omega} \mid v \text{ sub-harmonic}, v|_{\partial\Omega} \le g\Big)\Big\}, \quad u^{per} := \sup\big\{v \mid v \in S_g\big\}$$

אז u^{per} הרמונית ב־Ω (כלומר מועמד רציני לפיתרון).

הוכחה: תהיי $y \in \Omega$ ולכן קיימת סדרה $v_n \in S_g$ כך ש־$v_n(y) \to u^{per}(y)$.
מעיקרון המקסימום מתקיים $v_n \le \sup_{\partial\Omega} g$ ונגדיר $\tilde{v}_n := \max\{v_n, \inf_{\partial\Omega} g\}$ ומתקיים

$$\inf g \le \tilde{v}_n \le \sup g, \quad v_n(y) \le \tilde{v}_n(y) \underset{\tilde{v}_n \in S_g}{\le} u^{per}(y)$$

ומכלל הכריך נובע ש־$\tilde{v}_n(y) \to u^{per}(y)$ וזו סדרה של פונקציות חסומות ב־S_g.
יהי $B = B(y,r) \subseteq \Omega$ כך ש־$\overline{B} \subseteq \Omega$, נשים לב שעם ההרמה ההרמונית וטענה 3.19 $\tilde{v}_n \le V_n$ ולכן $V_n \in S_g$ ונקבל את שרשרת אי־השיוויונות $\tilde{v}_n \le V_n \le u^{per}$ ולכן בנקודה y נקבל $V_n(y) \to u^{per}(y)$.
אז $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה של פונקציות הרמוניות בכדור B וממשפט 3.20 קיימת תת־סדרה V_{n_k} שמתכנסת ב־B לפונקציה הרמונית h_v כך שמתקיים $V_{n_k} \to h_v$ נקודתית ומיחידות הגבול $V_{n_k}(y) \to u^{per}(y)$ וכן $V_{n_k}(y) \to h_v(y)$.
נרצה להראות שזה מתקיים לכל נקודה ב־B: כבר ידוע $h_v \le u^{per}$ ב־B ולכן נשאר להראות את האי־שיוויון השני; נניח בשלילה שקיימת $z \in B$ עבורה $h_v(z) < u^{per}(z)$.
תהיי $w_k \in S_g$ כך ש־$w_k \ge V_{n_k}$ ו־$w_k(z) \to u^{per}(z)$.
מהגדרת sup נקבל שקיימת סדרה $\hat{w}_k \in S_g$ המקיימת את התנאי השני ונחליף $w_k := \max\Big\{\hat{w}_k, V_{n_k}\Big\} \in S_g$ ומתקיים $V_{n_k} \le w_k \le u^{per}$ ובפרט $w_k(z) \to u^{per}(z)$ וכן $w_k(y) \to u^{per}(y)$.
ושוב עם ההרמה ההרמונית, $W_k \in S_g$ ומתקיים $V_{n_k} \le w_k \le W_k \le u^{per}$ ונוכל למצוא תת־סדרה מתכנסת W_{k_n} ב־B לפונקציה הרמונית h_w ומתקיים

$$h_v \le h_w, \quad h_v(y) = h_w(y) = u^{per}(y), \quad h_v(z) < h_w(z) = u^{per}(z)$$

לכן הפונקציה $h_v - h_w \le 0$ היא פונקציה הרמונית שאינה קבועה ומקבלת מקסימום 0 בנקודה פנימית y בסתירה לעקרון המקסימום ולכן $h_v \equiv u^{per}$ ב־B.
משרירותיות B, y נקבל ש־u^{per} הרמונית ב־Ω. □

3.4 תנאי שפה

משפט 3.22

אם Ω הוא תחום C^2 ו־$g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ רציפה אז ניתן לפתור באופן יחיד את בעיית דיריכלה ב־Ω

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

נשים לב שהפיתרון הוא יחיד שכן אם יש שני פתרונות ונסתכל על ההפרש שלהם מעיקרון המקסימום והמינימום (זה מתאפס על השפה).
כיצד נפתור את הבעיה הכללית (בעיית פואסון)?

$$\begin{cases} \Delta u = f \quad \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

נגדיר

$$u_1 := \Gamma * f$$
$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0 \\ u_2|_{\partial\Omega} = g - u_1|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

נקבל $u_1 + u_2 = u$ ולכן

$$\Delta u = \Delta u_1 + \Delta u_2 = f$$
$$u|_{\partial\Omega} = u_2\ |_{\partial\Omega} + u_1|_{\partial\Omega} = g$$

ועכשיו בעזרת פרון אנחנו יודעים לפתור גם את משוואות פואסון.

סוף הרצאה 22 – 24/06